1) Grundlagen Physik II

Taylorentwicklung

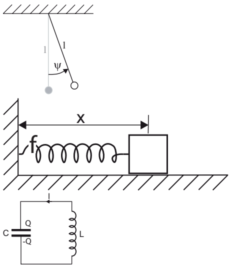
Inverse einer 2x2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}$$

2) Freie Schwingungen einfacher Systeme (S. 5)

Schwingung: Hin- und Herbewegung (Eigenschwingung: Jedes Teil schwingt mit derselben Frequenz und Phase)
Wellen: Von einem Ort zu einem anderen fortbewegt

1 Freiheitsgrad
(ungedämpft)



$$m \cdot l \cdot \ddot{\psi} = -m \cdot g \cdot \psi$$
$$\ddot{\psi} = -\tfrac{g}{l} \cdot \psi \qquad \omega^2 = \tfrac{g}{l}$$
$$m \cdot g \cdot \ddot{x} = f \cdot x$$
$$\ddot{x} = -\tfrac{f}{m} \cdot x \qquad \omega^2 = \tfrac{f}{m}$$

Selbstinduktion L verursacht Trägheit.

ψ: Auslenkung

x: Auslenkung

f: Federkonstante

Ein Serieschwingkreis ohne Ohm'scher Widerstand ist ungedämpft.

Allg. Lösung

Harmonische Schwingung

Ungedämpft

$$\boxed{\psi(t) = A \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}}$$

Gedämpft

$$\boxed{\psi(t) = A \cdot e^{-t/\tau} \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}}$$

A: Amplitude

φ: Phase

υ: Frequenz $[Hz]$

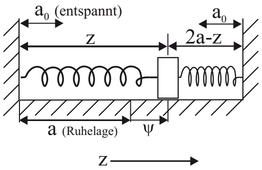
T: Periode: $T = \frac{1}{\upsilon}$

ω: Kreisfrequenz $[\frac{rad}{s}]$

$$\boxed{\omega = 2\pi\upsilon = \tfrac{2\pi}{T}}$$

ω^2: Rückstellkraft pro Einheitsauslenkung und Einheitsmasse

Longitudinale Schwingungen



Kraft in z: $F_Z = -2f(z-a)$

DGL: $M \cdot \ddot{z} = F_Z = -2f(z-a)$

mit: ψ(t)=z(t)–a

$$\boxed{\ddot{\psi} = -\omega^2 \psi} \qquad \omega^2 = \tfrac{2f}{M}$$

f: Federkonstante

a_0: Länge ungespannte Feder

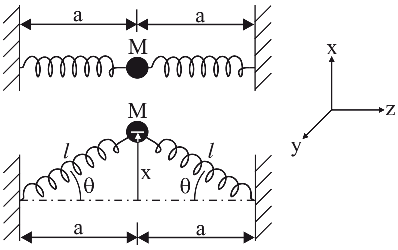
a: Federlänge Gleichgewicht

M: Masse

Transversale Schwingungen

(Betrachtung der Schwingung längs x)

(Gravitation bewirkt hier keine Rückstellkraft!)



	translatorisch	rotatorisch
Lineare Feder konservatives Kraftelement	F c F z_0 z z_0 entspannte Federlänge c [$\frac{N}{m}$]: Federkonstante $F = c(z - z_0)$	M φ φ_0 M c φ_0 Winkel zur entspannten Feder c [$\frac{Nm}{rad}$]: Federkonstante $M = c(\varphi - \varphi_0)$
Linearer Dämpfer dissipatives Kraftelement	F d F z d [$\frac{Ns}{m}$]: Dämpfungskonstante $F = d\dot{z}$	d M φ M d [$\frac{Nms}{rad}$]: Dämpfungskonst. $M = d\dot{\varphi}$
Ideale Bindung Typ Stange; zum starren Verbinden von Körpern	F F z $z =$ const. $(\dot{z} = \ddot{z} = 0)$ F beliebig	M φ M $\varphi =$ const. $(\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0)$ M beliebig

Federspannung

$$\boxed{T = f(l - a_0)}$$

x-Komponente der Federspannung

$$T_x = T \sin\theta = f(l - a_0)\sin\theta$$

Bewegungsgleichung (Voraussetzung: Federn verhalten sich linear)

$$\boxed{M \cdot \ddot{x} = F_x = -2T\sin\theta}$$
$$= -2f(l - a_0)\tfrac{x}{l} = -2fx\left(1 - \tfrac{a_0}{l}\right)$$

Federlänge ist eine Funktion von x

$$l = l(x)$$

Linearisierung der Bewegungsgleichung

entweder: $l >> a_0$ $\quad \frac{a_0}{l}$ kann vernachlässigt werden: $\boxed{M \cdot \ddot{x} = -2fx}$

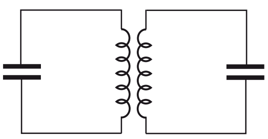
oder: Kleine Auslenkungen $\quad l^2 = a^2 + x^2 = a^2(1+\varepsilon)$ mit $\varepsilon = \frac{x^2}{a^2}$: $\boxed{\ddot{x} = -\frac{2T_0}{Ma}x}$ (mehr: Skript S. 9/10)

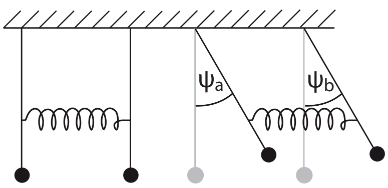
Bei kleinen Auslenkungen sind longitudinale Schwingungen schneller als transversale: $\frac{\omega_{long}^2}{\omega_{trans}^2} = \frac{2f/M}{2T/Ma} = \frac{fa}{T_0} = \frac{a}{a-a_0} = \frac{1}{1-\frac{a_0}{a}} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_{long}}{\omega_{trans}} = \frac{1}{\left[1-\frac{a_0}{a}\right]^{1/2}}}$

2 Freiheitsgrade

Jede allgemeine Bewegung kann als Superposition von zwei linear unabhängigen harmonischen Bewegungen (=**Normalschwingungen** / **Eigenschwingungen**) aufgefasst werden.

Normalschwingungen: Harmonische Bewegung mit gleicher Frequenz und gleicher Phase.





Allgemeinste Schwingung des Systems ist Superposition der beiden Normalschwingungen

2 Normalschwingungen: Bewegung gegeneinander und miteinander:

$$\begin{cases} \psi_a(t) = A_1 \cdot e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)} \\ \psi_b(t) = B_1 \cdot e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)} = \frac{B_1}{A_1}\psi_a(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi_a(t) = A_2 \cdot e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)} \\ \psi_b(t) = B_2 \cdot e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)} = \frac{B_2}{A_2}\psi_a(t) \end{cases}$$

Jede Normalschwingung hat charakteristische Frequenz und Form.

$$\psi_a(t) = A_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)}$$
$$\psi_b(t) = B_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)} + B_2 e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

Bsp.: Sphärisches Pendel

Pendel kann in x- und y-Richtung schwingen,
2 ungekoppelte Bewegungen
(keine Energieübertragung)

$$x(t)=\psi_a(t)=A_1\cdot e^{i(\omega_1 t+\varphi_1)}$$

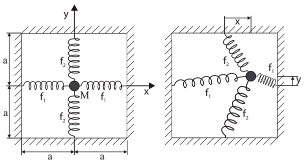
$$M\cdot\ddot{x}=-\tfrac{Mg}{l}\cdot x$$

$$M\cdot\ddot{y}=-\tfrac{Mg}{l}\cdot y$$

$$y(t)=\psi_b(t)=A_2\cdot e^{i(\omega_2 t+\varphi_2)}$$

ω^2: Frequenz der Normal-Schwingungen $\omega^2=g/l$
Bei beiden gleich (**entartet**) $\omega=\omega_1=\omega_2$

Bsp.: 2D harmonischer Oszillator
Approximation kleiner Auslenkungen! (x<<1)
→ Rückstellkraft längs x stammt nur von Federn f1, längs y analog.



→ entkoppelt in x- und y-Richtung

$$M\cdot\ddot{x}=-2\cdot f_1\cdot x$$

$$M\cdot\ddot{y}=-2\cdot f_2\cdot y$$

$$x(t)=A_1\cdot e^{i(\omega_1 t+\varphi_1)}$$

$$y(t)=A_2\cdot e^{i(\omega_2 t+\varphi_2)}$$

f: Federkonstante

$$\omega_1^2=\tfrac{2f_1}{M}\qquad \omega_2^2=\tfrac{2f_2}{M}$$

→ Mehr dazu im Skript S. 12 / 13

Normalkoordinaten
(Koordinaten, in denen DGLs ungekoppelt erscheinen)

Bsp.: gekoppelt:

$$\ddot{x}=-a_{11}\cdot x-a_{12}\cdot y$$

$$\ddot{y}=-a_{21}\cdot x-a_{22}\cdot y$$

Annahme Normalschwingungen:

$$x=A\cdot e^{i(\omega t+\varphi)}$$

$$y=B\cdot e^{i(\omega t+\varphi)}$$

Amplitudenverhältnis
(Der Normalschwingungen)

$$\left(\tfrac{y}{x}\right)_{\mathrm{mod}\,e1}=\left(\tfrac{B}{A}\right)_{\mathrm{mod}\,e1}=\frac{\omega_1^2-a_{11}}{a_{12}}\qquad \left(\tfrac{y}{x}\right)_{\mathrm{mod}\,e2}=\left(\tfrac{B}{A}\right)_{\mathrm{mod}\,e2}=\frac{\omega_2^2-a_{11}}{a_{12}}$$

Allg. Lösung

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=A_1\cdot e^{i(\omega_1 t+\varphi_1)}+A_2\cdot e^{i(\omega_2 t+\varphi_2)}$$

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)=B_1\cdot e^{i(\omega_1 t+\varphi_1)}+B_2\cdot e^{i(\omega_2 t+\varphi_2)}$$

Matrixschreibweise

$$\ddot{\vec{x}}+A\cdot\vec{x}=0\qquad \vec{x}=x\cdot(1\quad 0)^T+y\cdot(0\quad 1)^T$$

Eigenwerte / -vektoren

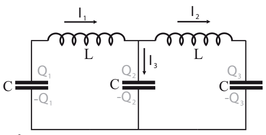
$$\boxed{\det(A-\lambda E)=0}\qquad \boxed{(A-\lambda_i E)\cdot\vec{e}_v=0}$$

Diagonalisierung (Eigenvektoren)

$$\boxed{S=\left(\vec{e}_{v,1}\quad \vec{e}_{v,2}\right)}\qquad \boxed{A'=diag(A)=S\cdot A\cdot S^{-1}}$$

ω_1: Eigenfrequenz der Normalschwingung 1
ω_2: Eigenfrequenz der Normalschwingung 2
E: Einheitsmatrix (Identität)
λ_i: Eigenwerte von A
ω^2: Eigenfrequenzen (Quadrat) manchmal auch $\boxed{\lambda=\omega_{0,i}^2}$
$\vec{e}_{v,i}$: Eigenvektoren
S: Transformationsmatrix
A': Diagonalmatrix von A

Bsp.: (Kapazitiv) Gekoppelte LC-Kreise
(Kopplung: mittleres C)



Die Frequenz beider Normalschwingungen muss gleich sein. In der 1. Normalschwingung ist $I_3=0$, somit könnte der mittlere Kondensator weggelassen werden.

$$I=\tfrac{Q}{C}\qquad I_1=I_2+I_3$$

Differentialgleichungen Kreis 1 und 2:

$$LC\cdot\ddot{I}_1+2I_1-I_2=0$$

$$LC\cdot\ddot{I}_2+2I_2-I_1=0$$

$$\ddot{I}_1=-2\omega_0^2I_1+\omega_0^2I_2$$

$$\ddot{I}_2=\omega_0^2I_1-2\omega_0^2I_2$$

Ansatz:

$$I_1(t)=A\cdot e^{i(\omega t-\varphi)}\qquad \omega_1^2=\tfrac{1}{LC}$$

$$I_2(t)=B\cdot e^{i(\omega t-\varphi)}\qquad \omega_2^2=\tfrac{3}{LC}$$

$$\begin{pmatrix}\ddot{I}_1\\ \ddot{I}_2\end{pmatrix}=-\omega_0^2\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}I_1\\ I_2\end{pmatrix}$$

Schwebungen

Eine Schwebung ist eine Superposition zweier harmonischer Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen ω_1 und ω_2:

Annahme (Vereinfachung):
Gleiche Amplitude,
gleiche Phase θ=0

Mittlere Frequenz:

$$\boxed{\overline{\omega}=\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)}$$

Modulationsfrequenz:

$$\boxed{\omega_{\mathrm{mod}}=\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}$$

Falls $\omega_1\approx\omega_2$: $\boxed{\omega_{\mathrm{mod}}<<\overline{\omega}}$

Annahme: $\omega_1>\omega_2$

$$\psi_1=A\cdot e^{i\omega_1 t}\qquad \psi_2=A\cdot e^{i\omega_2 t}\qquad \psi=\psi_1+\psi_2=Ae^{i\overline{\omega}t}\left(e^{i\omega_{\mathrm{mod}}t}+e^{-i\omega_{\mathrm{mod}}t}\right)=2Ae^{i\overline{\omega}t}\cdot\cos(\omega_{\mathrm{mod}}t)$$

Reelle schreibweise: $\psi(t)=A_{\mathrm{mod}}(t)\cdot\cos(\overline{\omega}t)$ mit $A_{\mathrm{mod}}(t)=2A\cos(\omega_{\mathrm{mod}}t)$ (Schwingung mit zeitlich variierender Amplitude)

Schlussfolgerung: Eine lineare Superposition von harmonischen Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen (die alle in einem schmalen Frequenzband liegen) führt zu einer annähernd harmonischen Schwingung mit der Frequenz $\overline{\omega}$.

Bsp.: Schwebung erzeugt durch Stimmgabeln

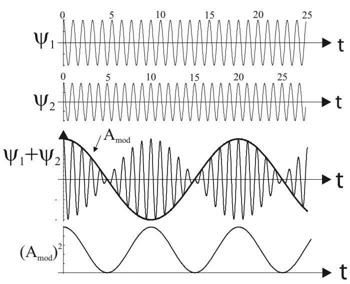
$$\overline{\nu}=\tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)$$

Druckschwankungen des Trommelfells werden durch ψ_1,ψ_2 beschrieben

Schwebungsfrequenz:

$$\boxed{\omega_{beat}=2\omega_{\mathrm{mod}}=\omega_1-\omega_2}$$

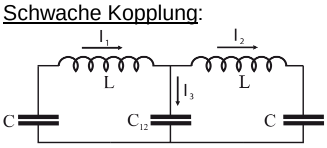
folgt aus:
$A_{\mathrm{mod}}^2(t)=4A^2\cos^2(\omega_{\mathrm{mod}}t)=2A^2\left(1+\cos(2\omega_{\mathrm{mod}}t)\right)$



ω_{beat}: Schwebungsfrequenz
ν_1, ν_2: Stimmgabelfrequenzen die ca. 5% von der mittleren Frequenz $\overline{\nu}$ abweichen.

Bsp.: Schwach gekoppelter L-C-Kreis
(Starke Kopplung):
C_{12} klein → $\frac{1}{i\omega C_{12}}$ gross
→ $I_3\approx 0$:
Wird zu LLCC-Serieschwingkreis

Schwache Kopplung:



C_{12} >> C → C_{12}→∞ → C_{12}=Kurzschluss: Linker und rechter Kreis ungekoppelt.
Allg. Lösung (Superposition der beiden Normalschwingungen):

$$I_1(t)=A_1e^{i(\omega_1 t-\varphi_1)}+A_2e^{i(\omega_2 t-\varphi_2)}$$

$$I_2(t)=A_1e^{i(\omega_1 t-\varphi_1)}-A_2e^{i(\omega_2 t-\varphi_2)}$$

ω_i^2: Eigenfrequenzen $\omega_1^2=\frac{1}{LC}=\omega_0^2\qquad \omega_2^2=\omega_0^2\left(1+\frac{2C}{C_{12}}\right)$
ω_0: Resonanzfrequenz ungekoppelter Kreis

Energiebetrachtung

(…)

Anwendung auf Gitterschwingungen im Festkörper

3) Gitterschwingungen, Spezifische Wärme von Festkörpern (S. 58)

Phononen

Quantisierte Gitterschwingungen mit:

Energie: $\hbar\,\omega(\vec{k})$ und Impuls: $\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$

$\vec{k}$: Wellenvektor des Phonons

$\omega(\vec{k})$: Dispersion von Phononen

Streuung thermischer Neutronen

Inelastische Streuung eines Neutron an einem Kristall:

- Verliert oder gewinnt Energie $\hbar\omega$ (bei Phonon Erzeugung oder Vernichtung)
- Verliert oder gewinnt Impuls (bei Absorption / Emittierung eines Phonons)

$$\hbar\omega - \hbar\omega_0 = \pm\hbar\omega(\vec{k})$$

$$\hbar\vec{q} - \hbar\vec{q}_0 = \pm\hbar \cdot \vec{k}$$

$\vec{q}_0$: Wellenvektor eines Neutrons vor Absorption oder Emission eines Phonons ($\vec{q}$ jener danach)

$\hbar\omega_0$: Energie des einfallenden Neutrons ($\hbar\omega$ jene nach der Erzeugung oder Vernichtung eines Phonons)

Äquipartitionstheorem

Im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T hat im Mittel jeder Freiheitsgrad die Energie: $W = \frac{1}{2}kT$

Energie Festkörper

$$\boxed{U = 3 \cdot N \cdot k \cdot T}$$

Innere Energie eines Festkörpers, der aus N Atomen besteht.

Ein Kristall / System mit N Atomen hat 3N Freiheitsgrade, resp. 3N Normalschwingungen

N : Anzahl Atome im Festkörper

T : Temperatur

k : Boltzmann-Konstante

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23}\ \tfrac{J}{K}$$

Kinetische Gastheorie

$$f(\vec{v})d^3v = \left(\tfrac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d^3v$$

Gibt Wahrscheinlichkeit an, dass ein Gasteilchen eine Geschwindigkeit innerhalb von d^3v um $\vec{v}$ aufweist.

Exponentialfaktor:

$$\tfrac{E}{kT} = \beta \cdot E$$

Mittlere kinetische Energie eines Teilchens

$$\langle E \rangle = \frac{\int e^{-\beta E} E d^3v}{\int e^{-\beta E} d^3v} = \frac{-\frac{\partial}{\partial\beta}\int e^{-\beta E} d^3v}{\int e^{-\beta E} d^3v} = -\tfrac{\partial}{\partial\beta}\ln\int e^{-\beta E} d^3v$$

$$= -\tfrac{\partial}{\partial\beta}[-\tfrac{3}{2}\ln\beta] = \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{\beta} = \tfrac{3}{2}kT$$

$$d^3v = dv_x dv_y dv_z$$

$$E = \tfrac{1}{2}m(v_x^2 + v_Y^2 + v_Z^2)$$

Energieeigenwertwertspektrum harmonischer Oszillator

$$\boxed{E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \cdot \hbar \cdot \omega} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Mittlere Energie eines Oszillators

$$\langle E \rangle = \left(\langle n \rangle + \tfrac{1}{2}\right) \cdot \hbar \cdot \omega$$

Wahrscheinlichkeit für besetzten Quantenzustand (Annahme: Oszillator in Wärmebad der Temp. T)

$$P_n = C \cdot e^{-\frac{E_n}{kT}} = e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}})$$

$\hbar$:

n : Quantenzustand

$\langle n \rangle$: Bose-Einstein Verteilungsfunktion

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Summierung aller Wahrscheinlichkeiten

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 = C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{kT}} = C \cdot e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}$$

C : Konstante

$$C = e^{\frac{\hbar\omega}{2kT}} - e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}$$

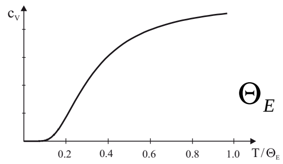
Spezifische Wärme

N Oszillatoren derselben Resonanzfrequenz ω besitzen die mittlere Energie:

$$\boxed{U = N\langle n \rangle \hbar\omega = \frac{N\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}}$$

Die spezifische Wärme dieser Oszillatoren beträgt:

$$\boxed{c_V = \left(\tfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V = Nk\left(\tfrac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)^2}}$$



$$\Theta_E = \tfrac{\hbar\omega}{k}$$

4) Index

Fehler! Keine Indexeinträge gefunden.