1) Gauss-Algorithmus (Lineares Gleichungssystem)

Vorgehen: Pivot-Zeile mit Faktor in der Hilfsspalte multiplizieren und von der momentanen Spalte abziehen.

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & b \\ \hline a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \quad \text{z.B.:} \quad \begin{array}{c|cc|c} & x_1 & x_2 & b \\ \hline & 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 3 & 3 & 2 & 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & b \\ \hline 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & -4 & 3 \end{array}$$

m	Anz. Gleichungen	r < n	(n-r) freie Parameter
n	Anz. Unbekannte	r = n	Eindeutige Lösung
a_{ij}	Element in Zeile i und Spalte j		
r	**Rang des Gleichungssystems** = Anzahl "Nicht-Nullzeilen" im Endschema		

Homogenes Gleichungssystem: Alle rechten Seiten sind gleich Null ($b_1 \ldots b_n = 0$).

Matrixschreibweise: $Ax = b$ oder: $A \mid b$ $\quad Rang(A) < Rang(A \mid b)$ → Keine Lösung

2) Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m x n Matrix	Matrix mit m Zeilen und n Spalten
a_{ij} / a_{mn}	Element in Zeile i und Spalte j
Nullmatrix	Alle Elemente sind gleich Null
obere Dreiecksmatrix	Die Elemente unterhalb der Diagonalen sind Null (nur quad. Matrix)
untere Dreiecksmatrix	Analog, auch Rechts- und Linksdreiecksmatrizen genannt (nur quad.)
Einheitsmatrix I_n	Diagonalmatrix mit nur Einsen in der Diagonalen (I_n auch = Identität)

Diagonalmatrix (nur quad. Matrix): Elemente ausserhalb der Diagonalen sind gleich Null. Immer von oben links nach unten rechts.

Bsp: $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = diag(3,9)$

Matrixrechnung

Addition: Die einzelnen Elemente werden addiert.
Multiplikation mit einer Zahl: Jedes Element wird mit der Zahl multipliziert.

Matrixmultiplikation

z.B.: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 18\frac{1}{2} \\ 18 & 14\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Anz. Spalten von A muss = Anz. Zeilen von B sein. Danach Produkte aus paarweise Zeile von A mit Spalte von B bilden und addieren.

am Beispiel oben: $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 14$, $1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 6 = 18\frac{1}{2}$, ... $\quad (AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

Transponieren

- symmetrische Matrix

Bei dem Transponieren einer Matrix werden die Spalten mit den Zeilen vertauscht:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix A heisst **symmetrisch**, falls sie ihrer Transponierten entspricht:

$$A = A^T \Leftrightarrow A_{symmetrisch}$$

Symmetrische Matrizen sind immer diagonalisierbar!

$$(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

Inverse der Matrix

(nur bei quad. Matrix)

Die Inverse einer Matrix ist eindeutig bestimmt!

"Wenn möglich nie die Inverse einer Matrix berechnen!"

Die Matrix A ist **invertierbar** (= regulär), falls gilt:

$$\det(A) \neq 0$$

Andernfalls heisst die Matrix **singulär**.
Die Inverse X berechnet man so:

$$AX = I_n \qquad X = A^{-1}$$

Formel für 2x2 Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Seien A, B invertierbar:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$
$$A^{-1}A = I_n$$

$A_{invertierbar} \Leftrightarrow Ax = b$ ist lösbar $\Leftrightarrow Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung

Orthogonale Matrix

(nur bei quad. Matrix)

Bei **orthogonalen** Matrizen gilt: $A^T \cdot A = I_n \qquad A^{-1} = A^T$

Orthogonale Matrizen machen längentreue Abbildungen.

Rang einer Matrix

(Anz. linear unabh. Spalten)

Der Rang einer Matrix A ist gleich dem Rang des linearen Gl.-Systems: $Ax = 0$
(= Anzahl "Nicht-Nullzeilen" im Endschema)

A ist **regulär**, wenn der Rang von A voll ist ($Rang_A$=n).
A ist singulär, wenn der Rang nicht voll ist.

Kern einer Matrix

Der Kern der Matrix A ist die Lösungsmenge {x} des homogenen linearen Gleichungssystems: $Ax = 0$
Die Menge aller Vektoren, die auf Null abgebildet werden.

$$Kern(A) = \ker(A) = \{x \in V^n \mid Ax = 0\}$$

Bild einer Matrix

Das Bild einer Matrix einer linearen Abbildung ist gleich den linear unabhängigen Spalten.

$$Bild(A) = span(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$$

Berechnung (1): Die Matrix A^T ausrechnen und Gauss darauf anwenden. Rang dieser Matrix = Anzahl benötigter linear unabh. Spalten = Anz. Nicht Nullzeilen nach Gauss.
Die Nicht-Nullzeilen im Gauss Endschema sind die transponierten Bilder von A.
Berechnung (2):
Elementare Spaltenumformungen (Addition von vielfachen einer Spalte zu einer andern; vertauschen von Spalten...)

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(Transponierte nach Gauss):

$$A^{T^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Bild(A) = span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

"im Bild"

Prüfen, ob b im Bild von A ist:
$b \in Bild(A) \Rightarrow Ax = b$ ist lösbar

$$r = Rang(A) \Rightarrow \dim(Kern(A)) = \dim(V) - r$$

$$\dim(Kern(A)) + \dim(Bild(A)) = \dim(V^n) = n$$

$$\dim(Bild(A)) = Rang(A) = r$$

3) Eigenwertproblem

Eigenwertproblem

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

A : Quadratische Matrix
λ_i : Eigenwerte (reell oder komplex)

Eigenwerte $\lambda_{1,2,...}$

Da $v \neq 0$ vorausgesetzt wird, gilt:

$\det(A - \lambda I_n) = 0 \;= P_n(\lambda)$

Die Lösungen (Nullstellen) des char. Polynoms sind die Eigenwerte der Matrix A.

v_i : Eigenvektoren
I_n : Einheitsmatrix
$P_n(\lambda)$: Charakteristisches Polynom

Eigenvektoren (Eigenraum)

$(A - \lambda_i I_n) \cdot v_i = 0$ oder: $\ker(A - \lambda_i I_n)$

Mit Gaussverfahren nach v (resp. beim Kern nach x) auflösen ergibt die Eigenvektoren.

I_E : Einheitsmatrix
$P_n(\lambda)$: Charakteristisches Polynom

Die frei wählbaren Parameter der Eigenvektoren werden =1 gesetzt. Bei 2 frei wählbaren Parametern gibt es 2 Eigenvektoren aus einer Gleichung! (a=1 und b=0 für den ersten Eigenvektor und a=0, b=1 für den zweiten.)

Vielfachheiten

Die **algebraische Vielfachheit** eines Eigenwerts ist dessen Nullstellen-Vielfachheit im char. Polynom.
Die **geometrische Vielfachheit** eines Eigenwerts ist die Dimension des dazugehörigen Eigenraums.

Alg. Vielfachheit: k, falls λ_i k-fache Nullstelle von $P_n(\lambda)$ ist.
= Anz. freie Parameter im dazugehörigen Eigenvektor nach Gaussverfahren.

Diagonalisieren

Symmetrische Matrizen sind immer diagonalisierbar!
Die Aufgabe besteht darin, T und D zu bestimmen.
Vorgehen:
Zuerst Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen.

Diagonalisierbar, falls algebraische Vielfachheiten der Eigenwerte = geometrische Vielfachheiten der zugehörigen Eigenvektoren.

Diagonalmatrix "D":
Einheitsmatrix mit Eigenwerten in der Diagonalen.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Transformationsmatrix "T":
Basis aus Eigenvektoren

$$T = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$$

Wenn A symmetrisch ist, gibt es eine orthogonale Transformationsmatrix. EV sind senkrecht → nur noch normieren

$$T^{-1}AT = D$$

Anwendung: DGL

Transformationsmethode bei Gleichungssystem $\dot{y} = Ay$: Matrix A diagonalisieren!

Allg. Lösung: $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 + ... + C_n e^{\lambda_n t}\vec{v}_n$

Newtonsche Bewegungs-gleichung

System der Form: $\ddot{y} = Ay$ mit $y = (y_1, y_2)^T$: Matrix A diagonalisieren!
Substitution: $y(t) = Tx(t)$
Zuerst Allg. Lösung für $x(t)$ finden: $\ddot{x}(t) = Dx(t)$, dann mit obiger Formel $y(t)$ finden.

4) Vektorräume

Vektorraum V

Für einen Vektorraum V (Menge mit Objekten) sind folgende Operationen definiert:
- Addition
- Multiplikation mit reellen Zahlen (auch mit 0!)

Es gelten folgende Rechenregeln:
- $a+b=b+a$
- $(a+b)+c=a+(b+c)$
- $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$
- $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$

I_E : Einheitsmatrix

$P_n(\lambda)$: Charakteristisches Polynom

Vektorräume dürfen nicht leer sein: $V,U \neq \{\}$

Unterraum U

Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums V heisst Unterraum, falls:
- $(a+b)\in U$ bei $a,b\in U$
- $\alpha\cdot a\in U$ bei $a\in U$, $\alpha\in R$

$\vec{0}$ muss auch in U sein!

Normen (von Vektorräumen)

Euklidische Norm (2-Norm): $\|x\|_2$ — Bsp. $x\in \mathbb{R}^3$: $\|x\|_2=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2}$

Maximum Norm: $\|x\|_\infty$ — Bsp.: $\|x\|_\infty=\max(|x_1|,|x_2|,...,|x_n|)$ (maximaler Betrag)

Lp-Norm: $\|x\|_p$ — Bsp.: $\|x\|_p=\sqrt[p]{x_1{}^p+x_2{}^p+...+x_n{}^p}$

$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+|x_3|$

Matrix-Normen

Maximale Zeilensummennorm:
Betrag der einzelnen Einträge addieren.
Grösste Summe ist Norm

$$\|A\|_\infty=\|A\|_Z=\max_i\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$$

Maximale Spaltensummennorm:
Betrag der einzelnen Einträge addieren.
Grösste Summe ist Norm

$$\|A\|_1=\|A\|_S=\max_j\sum_{i=1}^n|a_{ij}|$$

Spektralnorm
(wobei λ der höchste Eigenwert von A^TA ist)

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)} \qquad \|A^{-1}\|_2=\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(A^TA)}}$$

$\|A\|_2=|\lambda_{\max}|$ (falls A symmetrisch)

Wurzel aus Summe aller Elemente im Quadrat

$$\|A\|_F=\sqrt{Sum(Elemente^2)}$$

Dimension

Die Dimension eines Vektorraums ist die Anzahl Basisvektoren.
Die Dimension eines Eigenraums ist die Anzahl variierbarer Parameter.

Bsp: $\mathbb{R}^2:\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}$ $\quad \dim(\mathbb{R}^2)=\deg(\mathbb{R}^2)=2$

$\dim(Bild(A))=Rang(A)=r$

Linearkombination / Span

- Erzeugendensystem

Ein Span ist eine Linearkombination von Vektoren.
Mehrere Vektoren ($v_1...v_n$) heissen **erzeugend** (**Erzeugendensystem**) für einen Vektorraum V, falls man jeden Vektor $u\in V$ als Linearkombination von $v_1...v_n$ darstellen kann.

$\sum\lambda_i\bar{v}_i=\lambda_1\bar{v}_1...\lambda_n\bar{v}_n$

Span: $span(\vec{a}_1,...,\vec{a}_n)$

Linear unabhängig

$v_1...v_n$ heissen linear unabhängig, falls gilt: $\sum\lambda_iv_i=0$ nur (!) bei: $\lambda_1...\lambda_n=0$ (nur triviale Lösung)

Lineare Unabhängigkeit prüfen:
- Entweder Linearkombinationen mit reellen Zahlen zur trivialen Lösung erstellen (nur 1 Lösung → linear unabhängig)
- Gauss anwenden. Jede Stufe zeigt an, dass diese Vektoren linear abhängig waren (nur 1er Stufen → linear unabhängig)

Basis

$v_1...v_n$ heisst Basis von V, falls $v_1...v_n$ erzeugend und linear unabhängig sind.
Anzahl Basisvektoren: $n=\dim(V)$

Basis finden:
- Gauss anwenden.
- Rang des Gl.-Systems ist Anzahl Basisvektoren.
- Für jede Stufe im System einen Spaltenvektor in A wählen.

5) Abbildungen

Lineare Abbildung $A: R^n \to R^m \qquad A: V^n \to W^m$

Abbildungsmatrix Die Spalten der Matrix entsprechen den Bildern der Basisvektoren (Standard-Basis).

$A(F) = (F(\vec{e}_1), F(\vec{e}_2))$

Eine lineare Abbildung ist orthogonal, falls deren Abbildungsmatrix A orthogonal ist oder die Spalten der Abbildungsmatrix eine orthonormale Basis in R^n bilden.

6) Gauss-Algorithmus mit LR-Zerlegung

Ein lineares Gleichungssystem lässt sich auch schreiben als: $Ax = b$

Vorgehen:
(ohne Zeilenvertausch)

- Gauss-Algorithmus für A durchführen, ohne die rechte Seite b mitzubehandeln (gibt R, [P]).
- Faktoren aus der Hilfsspalte in eine Einheitsmatrix eintragen (gibt L).
- Das Endschema in $LR = A$ *(1)* aufteilen :

z.B.: $LR = A \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{pmatrix}$

- Jetzt wird $Lc = b$ *(2)* gebildet und nach c aufgelöst (Vorwärtseinsetzen)
- Danach kann die Lösung des Gleichungssystems mit $Rx = c$ bestimmt werden.

Permutation
(mit Zeilenvertausch)

Achtung: Wenn beim Gauss-Algorithmus bei der LR-Zerlegung Zeilen vertauscht werden, muss eine Permutationsmatrix P (Einheitsmatrix, bei welcher die Zeilen gleich wie beim Gauss getauscht werden) mitgeführt werden. Bei L werden die Zeilen nicht getauscht!

Jetzt gilt neu: $LR = PA$ statt *(1)* und: $Lc = Pb$ statt *(2)*

7) Determinanten

Die Determinante charakterisiert, ob eine Matrix regulär oder singulär ist (nur quad. Matrix!). Sie wird so berechnet:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det A = |A| = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad \det A = |A| = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Bei grösseren Matrizen analog: $\det A = a_1 \cdot \det(b_2 : n_n) - a_2 \cdot \det(b_1 : c_n / b_3 : n_n) + \ldots$

Erlaubte Operationen:
- 2 Zeilen aus der Matrix vertauschen (Determinante ändert ihr Vorzeichen!)
- Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addieren/subtrahieren (resp. Gauss).
- Faktor einer ganzen Zeile oder Spalte vor die Determinante schreiben (siehe Bsp.)

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \frac{a}{\lambda} & \frac{b}{\lambda} \\ c & d \end{vmatrix}$

Spezielles Verfahren nur (!) für 3x3 Matrizen:

$\det A = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - c_3a_2b_1 - b_3c_2a_1$

Spezielle Determinanten:
- Bei 1x1 Matrizen ist die Determinante diese Zahl selbst.
- Die Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Zeilen ist Null.
- Die Determinante einer Matrix, die eine Zeile aus lauter Nullen enthält ist Null.
- Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente. Somit ist det(A) genau dann nicht Null, wenn im Endschema nach Gauss: r = n gilt.

Falls: $\det(A) \neq 0$ → $Rang(A) = n \iff Ax = 0$ hat nur triviale Lösung

$\iff A^{-1}$ existiert

$\det(A^T) = \det(A)$

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$

n: (?)

$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

A invertierbar:

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

8) Fehlerrechnung (Methode der kleinsten Quadrate)

Normalgleichungen

Zum lösen von überbestimmten fehlerhaften Gleichungssystemen, um den Fehler zu minimieren.

Vorgehen:

- Datensätze notieren und gesuchte Unbekannte in $x_1 \dots x_n$ ausdrucken.
- Fehlergleichungen notieren, z.B.: $x_1 - 280 = r_1 \dots$
- Alle Fehlergleichungen in der Form $A\vec{x} - \vec{c} = \vec{r}$ aufschreiben.

z.B.: $A\vec{x} - \vec{c} = \vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 280 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}$

- Berechnen von $A^T A$ und $A^T c$
- Aus $A^T A \cdot \vec{x} = A^T \vec{c}$ die gesuchten Werte $x_1 \dots x_n$ berechnen.

c_i : gemessener Wert (gegeben)

r_i : Fehler

Beispiel

Datensätze z.B. als Punkte:

u	-1	0	2	3
v	0	1	2	5

Fehlerquadrate in y-Richtung:

$\min_{\vec{x}} \sum (y_{Modell} - y_{Daten})^2$

QR-Zerlegung

Lösung nur mithilfe von MATLAB einfach:

$A = QR$ $\quad Q$: orthonormale Matrix, orthonormale Basis

R : obere Dreiecksmatrix

Anwendung: $Ax - c = r$ lösen: $\quad A = QR \rightarrow Q^T A = R \quad d = Q^T c \rightarrow c \quad Rx = d \rightarrow x$

Berechnung: $A = [1 \;\; 0 \;\; 0;1 \;\; 1 \;\; 0;\dots]$ $\quad B = [280;390;\dots]$

$[Q, R] = qr(A)$ $\quad d = Q * b$

$R0 = R(1:3,1:3)$ (wählt die ersten 3 Zeilen und Spalten aus)

$x = R0 \setminus d$

9) Skalarprodukt

Skalarprodukt

$$\langle a, b \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix}^T = a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi)$$

φ : Zwischenwinkel

Eine Abbildung $\langle \; \rangle \quad V : V \rightarrow R$ heisst Skalarprodukt, falls:

$\langle x, x \rangle > 0 \qquad \langle x, x \rangle = 0 = x \Rightarrow \varphi = 90°$

$\langle x, ay \rangle = a \langle x, y \rangle \qquad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

$\langle x, y \pm z \rangle = \langle x, y \rangle \pm \langle x, z \rangle$

Vektorbetrag
(Länge eines Vektors)

Jedes Skalarprodukt indiziert eine Norm:

$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ $\qquad \langle a, a \rangle \geq 0$

Spezialfall: falls $\|\vec{a}\| = 1$ $\qquad \Rightarrow \vec{a} = Einheitsvektor$

Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren

Mit dem Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren wird eine Basis $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ (linear unabhängige Vektoren) zu einer orthonormalen Basis $\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n$ (Einheitsvektoren, die senkrecht aufeinander stehen) konvertiert.

$\bar{e}_1 = \frac{1}{\|\bar{a}_1\|} \cdot \bar{a}_1$

$\bar{c}_i = \bar{a}_i - \sum_{k=1}^{i=1} \langle \bar{a}_i, \bar{e}_k \rangle \cdot \bar{e}_k$

$\bar{e}_i = \frac{1}{\|\bar{c}_i\|} \bar{c}_i$

Beispiel: $\mathbb{R}^3$

$\bar{e}_1 = \frac{1}{\|\bar{a}_1\|} \cdot \bar{a}_1$

$\bar{c}_2 = \bar{a}_2 - \langle \bar{a}_2, \bar{e}_1 \rangle \cdot \bar{e}_1$

$\bar{e}_2 = \frac{1}{\|\bar{c}_2\|} \bar{c}_2$

$\bar{c}_3 = \bar{a}_3 - \langle \bar{a}_3, \bar{e}_1 \rangle \cdot \bar{e}_1 - \langle \bar{a}_3, \bar{e}_2 \rangle \cdot \bar{e}_2$

$\bar{e}_3 = \frac{1}{\|\bar{c}_3\|} \bar{c}_3$

Ausnahme: $\bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2$

Nur in diesem Bsp. ($\mathbb{R}^3$) kann der dritte Vektor mit Kreuzprodukt der ersten 2 berechnet werden.

10) MATLAB Befehle

Wichtiges / Rechnung (Vektoren, Matrizen)

Skalarprodukt zweier Vektoren	$dot(v1, v2)$	**Kreuzprodukt** zweier Vektoren	$cross(v1, v2)$
Matrix eingeben (Zeilen mit ; getrennt)	$A = [1\ \ 1;0\ \ 1;-1\ \ 1;0\ \ 1]$	**Matrix eingeben** (andere Variante)	$A = [1,1;0,1;-1,1;0,1]$
Einheitsmatrix (5x5 oder Grösse von A)	$eye(5)$ $eye(size(A))$	**Einer-Matrix** (5x5 oder Grösse von A)	$ones(5)$ $eye(size(A))$
Nullmatrix (5x5 oder Grösse von A)	$zeros(5)$ $eye(size(A))$	**Zufallszahlenmatrix** (5 Zeilen 6 Spalten)	$rand(5,6)$
Diagonale einer Matrix als Vektor	$diag(A)$	**Diagonalmatrix aus Vektor**	$diag([1\ \ 2\ \ 3])$
Oberes Dreieck einer Matrix	$triu(A)$	**Unteres Dreieck** einer Matrix	$tril(A)$
Transformierte	A' oder $transp(A)$	**QR-Zerlegung** von A	$[Q,R] = qr(A)$
	lu(A)		
Ax=b lösen	$A \setminus b$ $linsolve(A,b)$	**Normalengleichungen** (ebenfalls (A'A)x=(A'c))	$linsolve(A'*A, A'*c)$ $A'*A \setminus A'*c$ $regress(c, A)$
Diagonale einer Matrix als Vektor	$diag(A)$	**Diagonalmatrix aus Vektor**	$diag([1\ \ 2\ \ 3])$
Eigenwerte einer Matrix als Vektor	$eig(A)$	**Matrix X der EV, Diagonalmatrix D der EW**	$[X, D] = eig(A)$

Allgemein, Grundlagen

Variablen ausgeben (alle)	$whos$	**Wurzel ziehen**	$sqrt(2)$
Hilfe aufrufen (zu einer bestimmten Fkt.)	$help\ \ abs$	**Betrag** (einer Zahl)	$abs(-5)$ $= 5$
Angezeigte Kommastellen erweitern	$format\ \ long$	**Betrag** (Vektor)	$norm(v)$
Angezeigte Kommastellen erweitern	$format\ \ short$	**Sinus / Cosinus**	$\sin(pi)\ \ \cos(pi)$
		Zahl "PI": π	pi

Rechenoperationen

Matrixoperationen		Elementweise Operationen	
+	Addition	+	Addition
-	Subtraktion	-	Subtraktion
*	Multiplikation	.*	Multiplikation
/	Division von rechts	./	Division von rechts
\	Division von links	.\	Division von links
^	Potenz	.^	Potenz
'	Hermitesch Transponierte	.'	Transponierte

Vektorfunktionen

Sie können mit derselben Syntax sowohl auf Zeilen- wie auf Spaltenvektoren angewandt werden. Solche Funktionen operieren spaltenweise, wenn sie auf Matrizen angewandt werden.

max	Largest component
mean	Average or mean value
median	Median value
min	Smallest component
prod	Product of elements
sort	Sort array elements in ascending or descending order
sortrows	Sort rows in ascending order
std	Standard deviation
sum	Sum of elements
trapz	Trapezoidal numerical integration
cumprod	Cumulative product of elements
cumsum	Cumulative sum of elements
cumtrapz	Cumulative trapezoidal numerical integration
diff	Difference function and approximate derivative

Matrixfunktionen

Matrixanalysise	norm	Matrix or vector norm.
	normest	Estimate the matrix 2-norm.
	rank	Matrix rank.
	det	Determinant.
	trace	Sum of diagonal elements.
	null	Null space.
	orth	Orthogonalization.
	rref	Reduced row echelon form.
	subspace	Angle between two subspaces.
Lineare Gleichungen	\ and /	Linear equation solution.
	inv	Matrix inverse.
	cond	Condition number for inversion.
	condest	1-norm condition number estimate.
	chol	Cholesky factorization.
	cholinc	Incomplete Cholesky factorization.
	linsolve	Solve a system of linear equations.
	lu	LU factorization.
	luinc	Incomplete LU factorization.
	qr	Orthogonal-triangular decomposition.
	lsqnonneg	Nonnegative least-squares.
	pinv	Pseudoinverse.
	lscov	Least squares with known covariance.
Eigen- und singuläre Werte	eig	Eigenvalues and eigenvectors.
	svd	Singular value decomposition.
	eigs	A few eigenvalues.
	svds	A few singular values.
	poly	Characteristic polynomial.
	polyeig	Polynomial eigenvalue problem.
	condeig	Condition number for eigenvalues.
	hess	Hessenberg form.
	qz	QZ factorization.
	schur	Schur decomposition.
Matrixfunktionen	expm	Matrix exponential.
	logm	Matrix logarithm.
	sqrtm	Matrix square root.
	funm	Evaluate general matrix function.

Doppelpunktoperator

Der Doppelpunktoperator erstellt einen Zeilenvektor, der z.B. die Elemente 1 bis 10 enthält: $1:10$
Oder die Elemente von 1 bis 10 in Dreierschritten, also 1, 4, 7, 10: $1:3:10$
Genau genommen erzeugt er ein erstes Element i, gefolgt von $i+j$, $i+2j$, bis zu einem Element welches $\geq k$ ist, falls $j \geq 0$ und $\leq k$ falls $j < 0$ ist, bei folgender Form des Operators: $i:j:k$

11) Index