1) Potenzen, Wurzeln, Logarithmus, Euler

Allg.: $a,b \in R^+$

Potenzen: $n,m \in \mathbb{R}$

Wurzeln: $n,m \in \mathbb{N}$

$e^{i\cdot x} = \cos(x) + i\cdot\sin(x)$

$e^{\ln(x)} = x \qquad \ln(e) = 1$

$e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$

$a^n a^m = a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$(a^n)^m = a^{nm}$

$a^n b^n = (ab)^n$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$\boxed{a^0 = 1}$

$\boxed{a^1 = a}$

$\boxed{y = \log_a x \iff a^y = x}$

$\log_b(u\cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$

$\log_b(u/v) = \log_b(u) - \log_b(v)$

$\log_b(u^r) = r\cdot\log_b(u)$

$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\log(x)}{\log(a)}$

$\ln(e) = 1$

$\log(-1) =$ Error

$\log(0) =$ Error

$\boxed{\log(1) = 0}$

$\log(10) = 1$

$\log(10^2) = 2$

$\log(10^3) = 3$

2) Sin, Cos, Tan, Sinh, Cosh

Rechtwinkliges Dreieck:

$\sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$

$\cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$

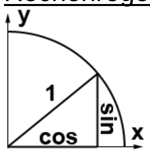
$\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$

$\tan(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Cosinussatz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

Rechenregeln sin/cos/tan:



$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

$2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$

$\boxed{e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)}$

$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{1}{2i}(e^{i\cdot\alpha} - e^{-i\cdot\alpha})}$

$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{i\cdot\alpha} + e^{-i\cdot\alpha})}$

$\sinh(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha})$

$\cosh(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha})$

$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$

$\frac{1}{\sin^2(\alpha)} = 1 + \cot^2(\alpha)$

α	0 0°	π/6 30°	π/4 45°	π/3 60°	π/2 90°	π 180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	√3	-	0
cot	-	√3	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-

Parameterwirkung sin / cos $a\cdot\sin(bx+c)+d$ — a : Amplitude, b : Periode= $\frac{2\pi}{b}$, c : Nullstelle, d : y-Verschiebung

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

$\cos(\gamma - a) = \cos(\gamma)\cos(\alpha) + \sin(\gamma)\sin(\alpha)$

$\sin(\gamma - a) = \sin(\gamma)\cos(\alpha) - \cos(\gamma)\sin(\alpha)$

$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

$\sin^3(x) = \frac{1}{4}(3\sin(x) - \sin(3x))$

$\sin^4(x) = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

$\cos^3(x) = \frac{1}{4}(3\cos(x) + \cos(3x))$

$\cos^4(x) = \frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)$

Beziehung zw. Bogenmass (b) und Gradmass (α): $\boxed{\frac{b}{\alpha} = \frac{\pi}{180°}}$

3) Funktionen, Darstellungen, Graphen

Parameter-Darst. $\vec{r}_{(t)} = \vec{r}_0 + t\cdot\vec{v}$

Param.-Darst.: Tangente an f: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$

Normale zu Tangente an f: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -f'(x) \\ 1 \end{pmatrix}$

Stetigkeit f stetig: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

Differenzierbarkeit f differenzierbar.: $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$

Asymptote **g(x)** ist Asymptote von **f(x)**, falls: $|f(x) - g(x)| \xrightarrow{x\to\infty,-\infty} 0$

f(x) auf Form **g(x)+h(x)** bringen, wobei **h(x)→0** damit **g(x)** Asymptote ist (evtl. Polynomdivision anwenden)

Kreisgleichung $(x-u)^2 + (y-v)^2 = R^2$ — Mittelpunkt $M(u/v)$ und Radius R

Ellipsengleichung $\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$ — $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 2\pi$

Mittelpunkt $M(u/v)$, Hauptachse parallel zur x-Achse

Mittelpunkt $M(0/0)$, Hauptachse als x-Achse

Krümmung $k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}$

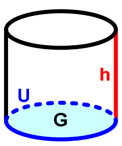
Mittelpunkt Krümmungskreis / Evolute: $MP(t_0) = \vec{r}(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}\cdot\frac{(-\dot{y}(t_0),\dot{x}(t_0))}{\sqrt{\dot{x}(t_0)^2 + \dot{y}(t_0)^2}}$

Niveaulinien "Höhenlinien": Funktion = Konstante (Höhe) setzen, um die Niveaulinie zu dieser Höhe zu erhalten: Kann Kreis-, Ellipsen-, Ebenengleichungen, etc. ergeben. $f(x,y) = C$

Mitternachtsformel Formel zum Lösen von Quadratischen Polynomen: $\boxed{x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

Geometrie

r: Radius, **V**: Volumen, **h**: Höhe, **A**: Fläche, **A₀**: Gesamtoberfläche, **G**: Grundfläche, **U**: Umfang, **M**: Mantelfläche



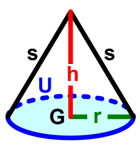
Zylinder:

$V = G\cdot h$

$M = U\cdot h$

(nur gerader Zylinder)

$O = M + 2\cdot G$



Kegel (gerade):

$V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{1}{3}Gh$

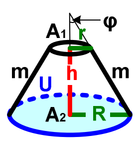
$M = r\cdot s\cdot\pi$

$A_0 = r\pi(r+s)$

$s = \sqrt{h^2 + r^2}$

$h = \sqrt{s^2 - r^2}$

$r = \sqrt{s^2 - h^2}$

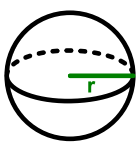


$V = \frac{h\cdot\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$

$m = \sqrt{(R-r)^2 + h^2}$

$M = (R+r)\cdot\pi\cdot m$

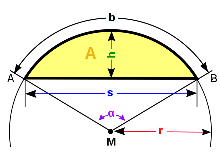
$h = \frac{R-r}{\tan(\varphi)}$



Kugel:

$V = \frac{4}{3}\pi\cdot r^3$

$A_0 = 4\pi\cdot r^2$



Kreissegment (Winkel in Bogenmass):

$A = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha) = \frac{1}{2}(rb - s(r-h))$

$r = \frac{4h^2+s^2}{8h}$

$s = 2r\sin(\frac{\alpha}{2}) = 2\sqrt{r^2 - (r-h)^2}$

$h = r - (r\cdot\cos(\frac{\alpha}{2})) = r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s}{2}\cdot\tan(\frac{\alpha}{4})$

$b = r\cdot\alpha = \frac{\alpha\cdot(4h^2+s^2)}{8h} = r\cdot\pi\cdot\frac{\alpha_{Grad}}{180°}$

$\alpha = 4\cdot\arctan(\frac{2h}{s})$

4) Folgen, Reihen, Induktion

Folge (Bsp.)

Normal: $a_k = k^2 \qquad k \in \mathbb{N}$ Rekursiv: $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ (Fibonacci)

Reihe

Arithmet.: $a_{n+1} = a_n + d \qquad a_1$ geg. Bsp.: $s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Geometr.: $a_{n+1} = a_n \cdot q \qquad a_1$ geg. Bsp.: $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \sum_{k=0}^{n} k \cdot q^k = \frac{q}{(1-q)^2}$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q^k = \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ konvergiert bei |q|<1

Eigenschaften (von Folgen und Reihen)

- Folge ist beschränkt, falls: $|a_k| \le 0$
- Folge ist monoton, falls: $a_k - a_{k-1} \ge 0$ (steigend) oder: $a_k - a_{k-1} \ge 0$ (fallend)
- Folge ist konvergent, falls: $\exists \lim_{k\to\infty} a_k$ $\qquad \exists$:"existiert"
  Eine konvergente Folge ist auch immer beschränkt!
- Wenn eine Reihe konvergiert, muss deren Folge gegen konvergieren (=Nullfolge)

Taylorreihe (spezielle Potenzreihe)

Approximation von analytischen Funktionen. Funktion $f(x)$ um x_0 entwickeln:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k\right)}$$

Je höher der Entwicklungsgrad, desto exakter die Approximation!

Bsp. (Taylorreihe um $x=0$ entwickelt)

$$f(x) = e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + i\cdot\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) \overset{!}{=} \cos(x) + i\sin(x)$$

Induktion

Werkzeug zum zeigen, dass eine Reihe korrekt ist (nicht jedoch um sie herzuleiten)

Induktionsverankerung: Ersten Schritt beweisen (z.B. $n=0$ bei $n = 0,1,2,\ldots$)

Induktionsschritt: Den Schritt $n \to n+1$ beweisen

Fakultät

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

Anwendungs-Bsp.: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Div Bsp.

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$ (Konvergenz für $|x| \le 1$)

$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \ldots$

$\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-x} = (1 - x + x^2 - \ldots)\cdot(1 + x + x^2 + \ldots) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$ (für $|x| < 1$)

$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$

5) Grenzwerte, Unendlichkeit, Komplexe Zahlen

Grenzwerte

- $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$
- $\lim(f(x)\cdot g(x)) = \lim f(x)\cdot \lim g(x)$ und $\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$
- $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x))$ → falls f stetig in $g(x)$

Unendlichkeit

$\cup$: "oder"

Regel von Bernoulli / De l'Hôptial:

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ falls: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \cup \infty$

Wichtig:

$\infty - \infty \ne 0$

$0\cdot\infty \ne 0$

Komplexe Zahlen

Standard-Form: $\boxed{z = x + i\cdot y}$

Phasor-Form: $z = |z|\cdot(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

Exponentialform: $z = |z|\cdot e^{i\theta}$

Argument/Phase: $\arg(z) = \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

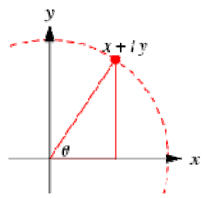
Betrag: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Komplex konjugiert: $z = x + i\cdot y, \quad \bar{z} = x - i\cdot y$

Argument/Phase:

$z = a + b\cdot i$

$$\theta = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & a>0, b \ \ beliebig \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & a<0, b\ge 0 \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi & a<0, b<0 \\ \pi/2 & a=0, b>0 \\ -\pi/2 & a=0, b<0 \\ unbestimmt & a=0, b=0 \end{cases}$$



$\mathrm{Re}(z) = x$

$\mathrm{Im}(z) = y$

6) Koordinatentransformationen, Jakobi-Matrix

Jakobi-Matrix
Transformation der Funktion:

$$f_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} x_{(x,y,z)} \\ y_{(x,y,z)} \\ z_{(x,y,z)} \end{pmatrix}$$

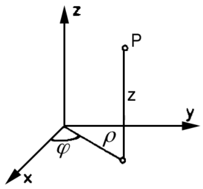
Bei: $\Phi_{(r,\vartheta,\varphi)} = \begin{pmatrix} x_{(r,\vartheta,\varphi)} \\ y_{(r,\vartheta,\varphi)} \\ z_{(r,\vartheta,\varphi)} \end{pmatrix}$ → $J = \begin{pmatrix} \frac{d}{dr} x_{(r,\vartheta,\varphi)} & \frac{d}{d\vartheta} x_{(r,\vartheta,\varphi)} & \frac{d}{d\varphi} x_{(r,\vartheta,\varphi)} \\ \frac{d}{dr} y_{(r,\vartheta,\varphi)} & \frac{d}{d\vartheta} y_{(r,\vartheta,\varphi)} & \frac{d}{d\varphi} y_{(r,\vartheta,\varphi)} \\ \frac{d}{dr} z_{(r,\vartheta,\varphi)} & \frac{d}{d\vartheta} z_{(r,\vartheta,\varphi)} & \frac{d}{d\varphi} z_{(r,\vartheta,\varphi)} \end{pmatrix}$

$|\det(J)|$ in Integralen mit Koord.-Transformationen dazu multiplizieren!

Bsp.: $\iiint\limits_K f_{(x,y,z)} dV = \iiint\limits_K \Phi_{(r,\vartheta,\varphi)} \cdot |\det(J)| dV$

Kartesisch ↔ Zylindrisch

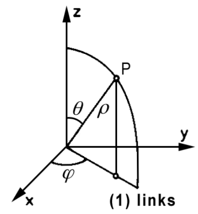
$x = \rho\cos(\varphi)$
$y = \rho\sin(\varphi)$
$z = z$
$dxdy = |\det(J)| d\rho d\varphi = \rho d\rho d\varphi$
$|\det(J)| = \rho$

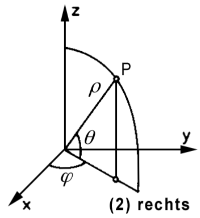


Kartesisch ↔ Sphärisch / Kugel: (1) und (2)

(1):
$x = \rho\cos(\varphi)\sin(\theta)$
$y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta)$
$z = \rho\cos(\theta)$
mit $\theta \in [0,\pi]$
$|\det(J)| = \rho^2 \sin(\theta)$

(2):
$x = \rho\cos(\varphi)\cos(\theta)$
$y = \rho\sin(\varphi)\cos(\theta)$
$z = \rho\sin(\theta)$
mit $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$|\det(J)| = \rho^2 \cos(\theta)$





Umrechnungen

Explizite Darstellung (kart.) ↔ Parameterdarstellung (kart.):
$x_{(t)} = t$
$y_{(t)} = f_{(t)}$

Parameterdarstellung (kart.) ↔ Parameterdarstellung (polar)
$x_{(\varphi)} = r \cdot \cos(\varphi)$
$y_{(\varphi)} = r \cdot \sin(\varphi)$

7) Ableitung

Ableitung

$$f'_{(x_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Ableitungsregeln

Produkt-, Ketten-, und Quotientenregel

$(f \cdot g)' = f'g + fg'$ $(f(g))' = f'(g) \cdot g'$ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Verallg. Kettenregel

Bsp.: $g(t) = f(x_{1(t)}, ..., x_{n(t)})$ $g'(t_0) = f_{x1}(x_0) \cdot \dot{x}_1(t_0) + ... + f_{xn}(x_0) \cdot \dot{x}_n(t_0)$

3 Variablen

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)}) = \dot{x}_{(t)} \cdot f_x(x,y,z) + \dot{y}_{(t)} \cdot f_y(x,y,z) + \dot{z}_{(t)} f_z(x,y,z)$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}$$

Linearisierung

$f_{(x_0 \pm \varepsilon)} = f_{(x_0)} \pm \varepsilon \cdot f_{(x_0)}$ Approximation der Funktion in Umgebung ε.

Mehrere Variablen

Extrema: $f_{x_1}(x_1, ..., x_n) = 0$,..., $f_{x_n}(x_1, ..., x_n) = 0$ (Partielle Ableitungen), resp. $grad(f) = 0$
Ebenfalls Rand betrachten!

Hesse-Matrix

Symmetrisch wegen Satz von Schwarz:
$f_{xy} = f_{yx}$

$$H(f) = H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Bsp.: $H(f_{(x,y,z)}) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$

- $\det(H) > 0$, $f_{xx} > 0$ H negativ definit Maximum
- $\det(H) > 0$, $f_{xx} < 0$ H positiv definit Minimum
- $\det(H) < 0$ H indefinit Sattelpunkt

Totales Differential (Totale Ableitung)

$$f'(x_1, ..., x_n) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Häufige Ableitungen (Funktion → Ableitung)

a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$e^{a\cdot x}$	$a \cdot e^{ax}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)} = \frac{1}{x}\log_a(e)$			$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1-\tanh^2(x)$

8) Integration

Uneigentl. Integral

Grenzen ausserhalb von $\mathbb{D}$

Bsp.: $\int_0^8 (8-x)^{-1/3}dx = \lim_{b\to 8}\int_0^b (8-x)^{-1/3}dx = 6$

Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Die Ableitung eines bestimmten Integrals über eine stetige Funktion f nach der oberen Integrationsgrenze ist gleich dem Wert des Integranden an dieser Grenze.

Innere Ableitung berücksichtigen!

Bsp.: $\left(\int_0^{\sin(x)} f(t)dt\right)' = \cos(x)\cdot f(\cos(x))$ (?)

Partielle Integration

Bei Funktionenprodukt, bei welchem man die Stammfunktion von nur einer Funktion bilden kann.

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \left[F(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)\cdot g'(x)dx$$

↑ ↓

Man muss nur $f(x)$ und danach $F(x)$ integrieren.

Von $g(x)$ muss man keine Stammfunktion bilden!

Unbestimmtes Integral:

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

Variablensubstitution

$$\int_a^b f(z_{(x)})\cdot z'_{(x)}\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$

Substitution z.B. $u = x^2$.
Danach auch $u' = \frac{du}{dx}$ bilden!

Bei bestimmten Integralen, die Grenzen durch $u(a)$ & $u(b)$ berechnen.

Partialbruchzerlegung

$$r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \ldots + \frac{A_n}{(x-x_n)}$$

Zerlegung in Partialbrüche; Jeder Nullstelle x_i des Nenners $N(x)$ wird ein Partialbruch zugeordnet.

Betragsfunktion integrieren

$$f(x) = |x| \overset{!}{=} \begin{cases} x \geq 0: & x \\ x < 0: & -x \end{cases}$$

Z.B.: Von -1 bis 1: $\int_{-1}^{1}|x|dx = \int_{-1}^{0}(-x)dx + \int_0^1 xdx$

Div.

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

9) Integralanwendungen (Physik, Mathematik)

Rotationskörper

Oberflächeninhalt
von Rotationskörpern (um x-Achse)

$$O_x = 2\pi\cdot\int_{x_0}^{x_1} f_{(x)}\cdot\sqrt{1+(f'_{(x)})^2}\,dx$$

resp.: $O_x = 2\pi\cdot\int_{t_0}^{t_1} y_{(t)}\cdot\sqrt{\dot{x}_{(t)}^2 + \dot{y}_{(t)}^2}\,dt$

Volumeninhalt
von Rotationskörpern (um x-Achse)

$$V_x = \pi\cdot\int_{x_0}^{x_1}(f_{(x)})^2dx$$

resp.: $V_x = \pi\cdot\int_{t_0}^{t_1} y_{(t)}^2\dot{x}_{(t)}dt$

Wegintegrale

Weglänge von γ $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$
$$s = \int_\gamma dx \qquad s = \int_\gamma ds = \int_\gamma \left|\dot{\vec{s}}_{(t)}\right| dt \qquad s = \int_\gamma dr = \int_\gamma \left|\dot{\vec{r}}_{(t)}\right| dt$$

Fläche unter f auf γ $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$
$$F = \int_\gamma f_{(x)} dx \qquad F = \int_\gamma f_{(x,y)} ds = \int_\gamma f_{(x,y)} \cdot \left|\dot{\vec{s}}_{(t)}\right| dt \qquad s = \int_\gamma f_{(x,y,z)} dr = \int_\gamma f_{(x,y,z)} \cdot \left|\dot{\vec{r}}_{(t)}\right| dt$$

Arbeit (von $\vec{v}$ auf γ)
$$A = \int_\gamma \vec{v}_{(x,y,z)} d\vec{r} = \int_a^b \vec{v}_{(\gamma_{(t)})} \cdot \dot{\vec{\gamma}}_{(t)} dt$$
Arbeit von $\vec{v}$ entlang Linie γ. $\vec{\gamma}_{(t)} = \overrightarrow{PQ}$
(Unabhängig vom Weg: siehe "Rotation")

Weg zusammengesetzt:
$$A = \int_{\gamma_1} \vec{v} d\vec{r} + \int_{\gamma 2} \vec{v} d\vec{r} + \ldots \qquad \int_{\overline{PQ}} \vec{v} d\vec{r} + \int_{\overline{QP}} \vec{v} d\vec{r} = 0$$
Bei: $n \perp rot(\vec{v})$: $A = 0$

Flächenintegrale

Flächeninhalt von S $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$
$$F = \iint_S 1 dF \qquad F = \iint_S 1 dO$$

Volumen unter f auf S $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$
$$V = \iint_S f_{(x,y)} dF \qquad V = \iint_S f_{(x,y,z)} dO$$

Kartesisches System:
$$dF = dxdy$$
$$dO = dxdydz$$

Transformiertes System / Param.:
$$dF = \left|\det(J)\right| dudv$$
$$dO = \left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| dudv$$

Fluss (von $\vec{v}$ durch Körper B)
$$\Phi = \iint_B \vec{v}_{(x,y,z)} \cdot \vec{n}_{(x,y,z)} \cdot dO$$
$$\Phi_{tot} = \Phi_A + \Phi_B + \ldots \qquad \left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right| = \left|\tfrac{\partial}{\partial u}\vec{r} \times \tfrac{\partial}{\partial v}\vec{r}\right|$$

Durch Körper B in Richtung des Normalenvektors. Vgl. Divergenzsatz!

Volumenintegrale

Volumen von K
$$V = \iiint_K 1 dV$$

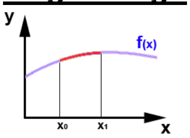
Masse unter f auf K
$$M = \iiint_K f_{(x,y,z)} dV$$

Kartesisches System:
$$dV = dxdydz$$

Transformiertes System / Param.:
$$dV = \left|\det(J)\right| dudvdw$$

Div. Integrale

Bogenlänge



Weg der Kurve K in Param.-Darst.:
$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| dt$$

Explizit
$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

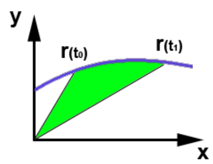
Kugelkoord.:
$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\, d\varphi$$

Flächeninhalt

Körper K: $A = \iint_K 1 \cdot dO$ $\qquad$ f Explizit: $A = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$ $\qquad$ f Param.-Darst.: $A = \int_{t_0}^{t_1} \dot{x} y dt$

Sektorfläche

Parameterdarst.: $F = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x\dot{y} - \dot{x}y) dt$ $\qquad$ Kugelkoord.: $F = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 d\varphi$



Sektorfläche

Trägheitsmoment (Hier: Rotation um die z-Achse)
$$J_0 = \rho \cdot \iiint_B (x^2 + y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$
ρ : Dichte, evtl. $\rho_{(x,y,z)}$
$$J_0 = \iiint_B \rho_{(x,y,z)} \cdot (x^2 + y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Schwerpunkt

Fläche: $x_s = \dfrac{1}{A} \iint xdA$ $\qquad$ Volumen: $x_{s\,\rho=konst} = \dfrac{1}{V} \iiint xdV$ $\qquad$ $x_{s\,\rho\neq konst(z)} = \dfrac{1}{M} \int zdM$

zusammengesetzt: (Grenzen anpassen!)
$$x_s = \frac{\sum (x_{s,i} \cdot A_i)}{\sum A_i} \quad / \quad x_s = \frac{\sum (x_{s,i} \cdot V_i)}{\sum V_i} \quad / \quad \vec{r}_s = \frac{1}{m} \sum \vec{r}_i \cdot m_i$$

Potential

$\vec{v} = \vec{\nabla} f$ $\qquad$ Das Potential f von $\vec{v}$ lässt sich berechnen, wenn: $rot(\vec{v}) = 0$

10) Integraltafel

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx = \tfrac{1}{2}\left(\ln|1+x|-\ln|1-x|\right) = \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x(ax+b)}\,dx = -\frac{1}{b}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)+C \qquad A,B\neq 0$$

$$\int \frac{a}{b+x^2}\,dx = \frac{a\cdot\arctan(\frac{x}{\sqrt{b}})}{\sqrt{b}}+C$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^b}\,dx = \frac{(-a+x)^{1-b}}{1-b}+C$$

$$\int \frac{1}{(a-x)^b}\,dx = \frac{(a-x)^{1-b}}{b-1}+C$$

$$\int \frac{x}{b-x}\,dx = -x-b\ln(x-b)+C$$

$$\int \frac{x}{x-b}\,dx = x+b\ln(x-b)+C$$

$$\int \frac{x}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\ln(a+x^2)+C$$

$$\int x\cdot e^{x^2}\,dx = \tfrac{e^{x^2}}{2}+C$$

$$\int \sin(ax)\cdot\cos^n(ax)\,dx = -\tfrac{\cos^{n+1}(ax)}{(n+1)a}+C \qquad n\neq -1$$

$$\int \sin^n(ax)\cdot\cos(ax)\,dx = -\tfrac{\sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a}+C \qquad n\neq -1$$

$$\int \tfrac{1}{\cos(ax)}\,dx = \tfrac{1}{a}\cdot\ln\left|\tan(\tfrac{ax}{2}+\tfrac{\pi}{4})\right|+C$$

$$\int \tfrac{1}{\cos^2(ax)}\,dx = \tfrac{1}{a}\cdot\tan(ax)+C$$

$$\int \tfrac{1}{1+\cos(ax)}\,dx = \tfrac{1}{a}\cdot\tan(\tfrac{ax}{2})+C$$

$$\int \tfrac{1}{\cosh(ax)}\,dx = \tfrac{2}{a}\arctan(e^{ax})+C$$

$$\int \cos^2(a\cdot x)\,dx = \frac{x}{2}+\frac{\sin(2ax)}{4a}+C$$

$$\int \sin^2(a\cdot x)\,dx = \frac{x}{2}-\frac{\sin(2ax)}{4a}+C$$

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)}-\frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)}+C$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)}+\frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)}+C$$

$$\int \sqrt{1-\cos(x)}\,dx = -2\sqrt{1-\cos(x)}\cdot\cot(\tfrac{x}{2})+C$$

$$\int \sqrt{1+\cos(x)}\,dx = 2\sqrt{1+\cos(x)}\cdot\tan(\tfrac{x}{2})+C$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int\left(\sqrt{1+\sinh^2(u)}\right)^2du = \int \cosh^2(u)\,du = \ldots = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}\cdot x+\operatorname{arcsin}h(x)\right)+C$$

$$\int x\sqrt{a\cdot x}\,dx = \tfrac{2}{5}x^2\sqrt{ax}+C$$

11) Vektoranalysis

Vektorableitung

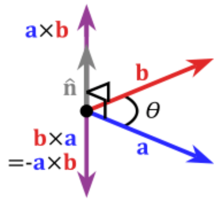
$\dot{\vec{r}}_{(t)} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{r}_{(t)} = \left(\frac{\partial}{\partial t} r_{1(t)}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t} r_{n(t)}\right)^T$

Bsp.: $\vec{r}_{(t)} = \begin{pmatrix} r_{1(t)} \\ r_{2(t)} \end{pmatrix}$ $\quad \dot{\vec{r}}_{(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} r_{1(t)} \\ \frac{\partial}{\partial t} r_{2(t)} \end{pmatrix}$

Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt liefert einen Vektor, senkrecht zur von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene. Bildet mit $\vec{a}, \vec{b}$ Rechtssystem.



Normierung auf 1 liefert den Normalenvektor $\vec{n}$ dieser Ebene.

Gradient
∇: "Nabla Operator"

$$grad(f) = \nabla = \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f \\ \frac{\partial}{\partial y} f \\ \frac{\partial}{\partial z} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

Gibt Richtung des steilsten Anstiegs an.
Betrag = Steigung

Skalarfeld: $f = f_{(x,y,z)}$

Vektorfeld: $\vec{v}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_{1(x,y,z)} \\ v_{2(x,y,z)} \\ v_{3(x,y,z)} \end{pmatrix}$

Rotation

$$rot(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} v_3 - \frac{\partial}{\partial z} v_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} v_1 - \frac{\partial}{\partial x} v_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} v_2 - \frac{\partial}{\partial y} v_1 \end{pmatrix}$$

Konservatives Vektorfeld

$\vec{v}$ konservativ $\Leftrightarrow$ Arbeit von $\vec{v}$ hängt nicht vom Weg ab $\Leftrightarrow$ $rot(\vec{v}) = 0$ $\Leftrightarrow$ es existiert ein Potentialfeld f, sodass: $grad(f) = \vec{v}$

Feldlinie:
Kurve, die in jedem Punkt tangential zum Vektorfeld ist.

Satz von Stokes

$$A = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{v}) \cdot \vec{n} dO$$ Nur für geschlossene Wege $\gamma = \partial S$

$\vec{v}$ **wirbelfrei**:
Rotation von $\vec{v}$ ist Null!

Divergenz

$div(\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x} v_1 + \frac{\partial}{\partial y} v_2 + \frac{\partial}{\partial z} v_3$

Divergenzsatz
(1. Satz von Gauss)

$$\Phi = \iint_{\partial K} \vec{v} \cdot \vec{n} dO = \iiint_K div(\vec{v}) dV$$

- Nur für geschlossene Flächen $S = \partial K$
- Gibt immer den Fluss von innen nach aussen an.

Rechenregeln

$$\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = div(\vec{\nabla} f)$$

Δ: Laplace Operator

$rot(\vec{\nabla} f) = (0, \ldots, 0) \qquad div(rot(\vec{v})) = 0$

Eigenwerte $\lambda_{1,2,\ldots}$

Da $v \neq 0$ vorausgesetzt wird, gilt:
$\det(A - \lambda I_n) = 0 \; = P_n(\lambda)$
Die Lösungen (Nullstellen) des char. Polynoms sind die Eigenwerte der Matrix A.

v_i: Eigenvektoren
I_n: Einheitsmatrix
$P_n(\lambda)$: Char. Polynom

Eigenvektoren
(Eigenraum)

$(A - \lambda_i I_n) \cdot v_i = 0$ oder: $\ker(A - \lambda_i I_n)$
Mit Gaussverfahren nach v (resp. beim Kern nach x) auflösen ergibt die Eigenvektoren.

I_E: Einheitsmatrix
$P_n(\lambda)$: Char. Polynom

12) Differentialgleichungen

DGL 1. Ordnung

$F(x, y_{(x)}, y'_{(x)}) = 0$
Allg. Lösung: Menge aller Lösungen.

Ordnung der DGL: Ordnung der höchsten darin vorkommenden Ableitung (von y).

Superpositions-Prinzip

Wenn: $y_{1(x)}$ Lösung von $f_{(y)} = g_{1(x)}$ — Dann: $f_{(x)} = g_{1(x)} + g_{2(x)}$
Und: $y_{2(x)}$ Lösung von $f_{(y)} = g_{2(x)}$ — Lösung: $y_{(x)} = y_{1(x)} + y_{2(x)}$

Separierbare DGL

Eine separierbare DGL kann auf folgende Form gebracht werden (y auf eine Seite):
$g(y) \cdot y' = f_{(x)}$

Lösung: Integrieren mit Trick: $(\dot{y}_{(x)} dx) = dy$

Allg. Lösung (Integrieren):
$$\int g(y_{(x)}) \cdot y'_{(x)} dx = \int f_{(x)} dx$$
$$\Rightarrow \quad \int g_{(y)} dy = \int f_{(x)} dx$$

Beispiel
(führt auf separierbare Gl.)

Form: $\ddot{y} + f(y) = 0$
Substitution: $\dot{y} = u(y)$, $\ddot{y} = \dot{u}(y) \cdot \dot{y}$

- y nicht ersetzen in f(y)
- Führt auf separierbare DGL
- Danach Rücksubstitution

Lineare DGL

Eine lineare DGL 1. Ordnung hat die Form:

$y' = p_{(x)} \cdot y + q_{(x)}$

$q_{(x)}$: Störglied / Inhomogener Term

Falls $q_{(x)} \neq 0$ (**inhomogen**): Lösung: Summe der Lösungen der homogenen DGL $y_{h_{(x)}}$ und einer partikulären Lösung

$y_{p_{(x)}}$: $y_{(x)} = y_{h_{(x)}} + y_{p_{(x)}}$

Falls $q_{(x)} = 0$ (**homogen**): Homogene lineare DGL sind separierbar!

Form: $y' = p_{(x)} \cdot y$

Homogene Lsg. *Konstante Koeffiziente* (lin unabh. Lös.)

Ansatz: $\boxed{y_{(x)} = e^{\lambda \cdot x}}$ $\quad y_{(x)} = \begin{cases} C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + \ldots & bei \quad \lambda_1 \neq \ldots \neq \lambda_n \\ C_1 \cdot e^{\lambda x} + C_2 \cdot x e^{\lambda x} + \ldots + x^{k-1} e^{\lambda x} & bei \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n \end{cases}$

Bei k -fachen konjugiert komplexen Nullstellen-Paaren $\lambda = \alpha \pm i\omega$ $(\omega \neq 0)$:

$$y_{(x)} = \left\langle \begin{matrix} C_1 \cdot e^{\alpha x} \sin(\omega x) & + C_3 \cdot x \cdot e^{\alpha x} \sin(\omega x) + \ldots + C_{2k-1} \cdot x^{k-1} \cdot e^{\alpha x} \sin(\omega x) \\ + C_2 \cdot e^{\alpha x} \cos(\omega x) & + C_4 \cdot x \cdot e^{\alpha x} \cos(\omega x) + \ldots + C_{2k} \cdot x^{k-1} \cdot e^{\alpha x} \cos(\omega x) \end{matrix} \right.$$

Eulersche DGL (lin unabh. Lös.) (k : Nullstellen-Vielfachheit)

Form: $x^n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_1 \cdot x \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$

Ansatz: $\boxed{y_{(x)} = x^{\lambda}}$ $\quad y_{(x)} = \begin{cases} C_1 \cdot x^{\lambda_1} + C_2 \cdot x^{\lambda_2} + \ldots & bei \quad \lambda_1 \neq \ldots \neq \lambda_n \\ C_1 \cdot x^{\lambda} + \ldots + C_n \cdot \log(x)^{k-1} \cdot x^{\lambda} & bei \quad \lambda_{1\ldots k} = \lambda \end{cases}$

Bei k -fachen konjugiert komplexen Nullstellen-Paaren $\lambda = \alpha \pm i\beta$ $(\beta \neq 0)$:

$$y_{(x)} = \left\langle \begin{matrix} C_1 \cdot x^{\alpha} \cos(b \log x) & + C_3 \cdot \log(x) x^{\alpha} \cos(\beta \log x) + \ldots + C_{2k-1} \log(x)^{k-1} x^{\alpha} \cos(\beta \log x) \\ + C_2 \cdot x^{\alpha} \sin(\beta \log x) & + C_4 \cdot \log(x) x^{\alpha} \sin(\beta \log x) + \ldots + C_{2k} \log(x)^{k-1} x^{\alpha} \sin(\beta \log x) \end{matrix} \right.$$

Partikuläre Lsg. Mit Ansatz (à la $q_{(x)}$) erraten oder Variation der Konstanten (Lagrange).

	Ansatz	Störglied $q_{(x)}$	Partikuläransatz $y_{p(x)}$
Ansätze 1. Grades	$A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	$\sin/\cos(\omega x)$	$C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$
	Polynom Grad n	$P_{n(x)}$	$C_n x^n + \ldots + C_1 x + C_0$

Koeffizienten Gleichsetzen mit denen der Originalgleichung → ergibt: $C_{0\ldots n}$!

	Ansatz	Störglied $q_{(x)}$	Partikuläransatz $y_{p(x)}$
	$e^{\lambda x}$ (a ist Koeff. von y in DGL: $y' + ay = q_{(x)}$)	$A \cdot e^{\lambda x}$	$\begin{cases} C \cdot e^{\lambda x} & bei \quad \lambda \neq -a \\ C \cdot x \cdot e^{\lambda x} & bei \quad \lambda = -a \end{cases}$
Ansätze 2. Grades (Den Rest von 1. Grad übernehmen)	Polynom Grad n $y_{(x)} = ax^2 + bx + c$ (Parameter: Koeffizienten von $Q_{n(x)}$)	$P_{n(x)}$	$\begin{cases} Q_{n(x)} & bei \quad b \neq 0 \\ x \cdot Q_{n(x)} & bei \quad a \neq 0, b = 0 \\ x^2 \cdot Q_{n(x)} & bei \quad a = b = 0 \end{cases}$

Lagrange

Zuerst Lsg. der homogenen DGL finden: $y_{h(x)} = C_1 \cdot y_{1(x)} + C_2 \cdot y_{2(x)}$

Allg. Lösung mit Ansatz von Lagrange: $y_{(x)} = \gamma_{1(x)} \cdot y_{1(x)} + \gamma_{2(x)} \cdot y_{2(x)}$

$\gamma_{1(x)}$ und $\gamma_{2(x)}$ durch dieses System finden:

$$\gamma'_{1(x)} \cdot y_{1(x)} + \gamma'_{2(x)} \cdot y_{2(x)} = 0$$
$$\gamma'_{1(x)} \cdot y'_{1(x)} + \gamma'_{2(x)} \cdot y'_{2(x)} = q_{(x)}$$

Homogene DGL

Eine homogene DGL kann auf folgende Form gebracht werden:

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ → evtl. Exponentialansatz

Allg. Lösung (Substitution – alle y durch z ausdrücken):

$z'x + z = f_{(z)} \qquad z_{(x)} = \frac{y_{(x)}}{x}$

Harmonischer Oszillator (Bsp.)

$\boxed{F''(x) - k \cdot F(x) = 0} \quad \Rightarrow \quad F(x) = a \cdot \sin(\sqrt{-k}\, x) + b \cdot \cos(\sqrt{-k}\, x)$

13) Differentialgleichungssysteme

Begriffe

- Ein DGL-System ist **autonom**, falls x (von $y_{1(x)}$, $y_{2(x)}$) nicht explizit auftritt.
- Es ist **gekoppelt**, wenn die Gleichungen voneinander abhängen.

Form

Das System auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= f_1(u,v)+b_1\\ \dot{v} &= f_2(u,v)+b_2\end{aligned} \quad \text{resp.} \quad \dot{\vec{z}} = A\cdot\vec{z}+\vec{b} \quad \text{mit} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Wenn nötig Substitution anwenden.

Lösung

1) Lösung mit Eigenwerten / Eigenvektoren

Funktioniert nur, wenn A 2 linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.

Vorgehen: Von der Matrix A die Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren v_i bestimmen. Die Eigenvektoren orthonormieren! Falls lin. unabhängig:

Allg. Lösung: $z_{(t)} = C_1\cdot v_1\cdot e^{\lambda_1 t}+C_2\cdot v_2\cdot e^{\lambda_2 t}+\dots$ schreiben als: $u_{(t)}$ / $v_{(t)}$

2) Lösung mit Einsetzen

Vorgehen: Die einte Gleichung in die andere einsetzen; entweder u oder v komplett eliminieren; Führt auf eine DGL 2. Ordnung.

Bsp.: $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} v &= \dot{u}-5u \\ \dot{v} &= \ddot{u}-5\dot{u}\end{aligned} \quad \rightarrow \quad \ddot{u}-6\dot{u}+9u=0$

Lösung: Lösen der erhaltenen DGL 2. Ordnung mit Ansatz $e^{\lambda x}$.

Gleichgewichts-Punkte

Lin. System

Ein linieares autonomes DGL-System mit konstanten Koeffizienten hat den Gleichgewichtspunkt: $(0/0)$. Für Stabilität Eigenwerte von A, resp. char. Polynom ablesen.

Nicht lin. System

Bei einem nicht linearen System sind Gleichgewichtspunkte = Konstante Lösung des DGL-Systems (keine Abhängigkeit von t mehr: $\dot{x}=\dot{y}=0$)

Gleichgewichtspunkte: (x/y)

Stabilität

Vorgehen: Bei linearem System Eigenwerte von A betrachten.
Bei nicht linearen Systemen: System linearisieren und GGW-Punkt in linearisiertes System einsetzen.

Linearisieren

Linearisieren eines Systems im Punkt (a/b):

$$\left|\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,y)\\ \dot{y} &= g(x,y)\end{aligned}\right| \quad \rightarrow \quad \left|\begin{aligned}\dot{x} &= f(a,b)+f_x(a,b)\cdot(x-a)+f_y(a,b)\cdot(y-b)\\ \dot{y} &= g(a,b)+g_x(a,b)\cdot(x-a)+g_y(a,b)\cdot(y-b)\end{aligned}\right|$$

Für Stabilität Eigenwerte von A des lin. Systems betrachten: $\dot{\vec{z}} = A\cdot\dot{\vec{z}}+\vec{b}$

Stabilität von Eigenwerten

$\lambda_1 \le \lambda_2 < 0$				asymptotisch stabil
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	oder	$0 < \lambda_1 \le \lambda_2$		instabil
$\lambda_1 = ib$	und	$\lambda_2 = -ib$		stabil (rein imaginär)
$\lambda_1 = a+ib$	und	$\lambda_2 = a-ib$	$a>0$	instabil (positiver Realtel)
$\lambda_1 = a+ib$	und	$\lambda_2 = a-ib$	$a<0$	asymptotisch stabil (negativer Realteil)
$\lambda_1 = 0$	oder	$\lambda_2 = 0$		ausgeartet

Phasenporträt

Explizite Form der Lösung eines DGL-Systems. Besteht aus den Trajektorien (= eindeutige Kurven durch (x_0 / y_0), resp. Lösungen des DGL-Systems). Parameter t eliminieren!:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Durchlaufsinn: Bei: $\dot{x} = \dots > 0$: Von links nach rechts.

14) Index

A

Ableitung ... 3
Ableitungsregeln ... 3
Arbeit ... 5
Asymptote ... 1
autonom (DGL-System) ... 9

B

Bernoulli / De l'Hôptial ... 2
beschränkt (Folge) ... 2
Bogenlänge ... 5

C

Charakteristisches Polynom ... 7
Cosinussatz ... 1

D

Differentialgleichungssysteme 9
Differenzierbarkeit ... 1
Divergenz ... 7
Divergenzsatz ... 7

E

Eigenraum ... 7
Eigenvektoren ... 7
Eigenwerte ... 7
Ellipsengleichung ... 1
Entwickeln (Reihe) ... 2
Euler ... 1
Evolute ... 1

F

Fakultät ... 2
Feldlinie ... 7
Fluss ... 5
Folge ... 2
Funktionen mehrerer Variablen ... 3

G

gekoppelt (DGL-System) ... 9
Gleichgewichtspunkt ... 9
Gradient ... 7

H

Hesse-Matrix ... 3

I

Induktion ... 2

J

Jakobi-Matrix ... 3

K

Kettenregel ... 3
konjugiert komplexe Nullstellen ... 8
Konservatives Vektorfeld ... 7
konvergent (Folge) ... 2
Kreisgleichung ... 1
Kreuzprodukt ... 7
Krümmung ... 1
Krümmungskreis ... 1

L

Laplace Operator ... 7
Linearisierung ... 3
Logarithmus ... 1
Lösungsformel (quad. Gl.) ... 1

M

Matrizen ... 1
Mitternachtsformel ... 1
monoton (Folge) ... 2

N

Nabla Operator ... 7
Niveaulinien ... 1

P

Parameterdarstellung ... 1
Partielle Integration ... 4
Phasenporträt ... 9
Potential ... 5
Potentialfeld ... 7
Potenzen ... 1
Produktregel ... 3

Q

Quotientenregel ... 3

R

Reihe ... 2
Rotation ... 7

S

Satz von Gauss ... 7
Satz von Schwarz ... 3
Satz von Stokes ... 7
Schwerpunkt ... 5
Sektorfläche ... 5
Skalarfeld ... 7
Stetigkeit ... 1
Systeme von Differentialgleichungen ... 9

T

Taylorreihe ... 2
Totale Ableitung ... 3
Trägheitsmoment ... 5
Trajektorien ... 9

U

Unendlichkeit ... 2

V

Variablensubstitution ... 3, 4, 5
Vektorfeld ... 7

W

wirbelfrei ... 7
Wurzeln ... 1