# 1) Laplacetransformationen

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $1 \;/\; H(s)$ | $\frac{1}{s}$ |
| $a$ | $\frac{a}{s}$ |
| $t^n \quad (n=0,1,\ldots)$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a} \quad (s>a)$ |
| $\sin(at)$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ |
| $\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ |
| $H(t-a) \quad (a>0)$ | $e^{-as}/s$ |
| $\delta(t-a) \quad (a>0)$ | $e^{-as}$ |

**Laplacetransformation**

$\boxed{\mathfrak{I}[f_{(t)}] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt} \qquad t \geq 0$

Inverse Laplacetransformation

$\mathfrak{I}^{-1}[F(s)] = f(t)$

**Linearität**

$\mathfrak{I}[\alpha \cdot f] = \alpha \cdot \mathfrak{I}[f]$

$\mathfrak{I}[\lambda \cdot f + \mu \cdot g] = \lambda \cdot \mathfrak{I}[f] + \mu \cdot \mathfrak{I}[g]$

(Bei Laplace-Transf. und inverser Laplace-Transf.)

**Verschiebungssatz**

Ist: $f(t) = e^{-at}g(t)$ $\qquad F = \mathfrak{I}[f]$

So ist: $F(s) = G(s+a)$ $\qquad G = \mathfrak{I}[g]$

$\Rightarrow \quad \mathfrak{I}[f(t-a)] = e^{-as} \cdot F(s)$ bei $a \geq 0$

**Fakultät**

Beispiel: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

**Faltungssatz**

$$\mathfrak{I}[f * g] = \mathfrak{I}\left[\int_0^t f(t-\varphi)g(\varphi)d\varphi\right] = F(s)G(s) = \mathfrak{I}[f] \cdot \mathfrak{I}[g]$$

$\mathfrak{I}^{-1}[F_{(s)} \cdot G_{(s)}] = f * g = \int_0^t f(t-\varphi)g(\varphi)d\varphi$

**Ableitungsregel**

$\mathfrak{I}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} \cdot \frac{d^j f(0)}{dt^j}$

$\mathfrak{I}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$

$\mathfrak{I}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$

**2. Ableitungsregel**

$f(t) = t^k g(t) \quad \Rightarrow \quad F(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} G(s)$

**Differentialgleichungen**
(Anfangswertprobleme)

Auf beiden Seiten der Gleichung $\mathfrak{I}$ anwenden, Differentialgleichung mit der neuen Variable Y(s) statt y(t) schreiben, nach Y(s) auflösen. Wieder rücktransformieren gibt y(t).

**2. Verschiebungssatz**

$$\mathfrak{I}^{-1}[e^{-sa}F(s)] = H(t-a) \cdot f(t-a) = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

bei $a > 0$

**Heaviside Funktion**

$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ $\qquad \boxed{H(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}}$

Fallunterscheidungsfunktionen werden mit dieser Funktion vor der Laplacetransformation umgeschrieben

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \in [x_0 - b, x_0 + b] \\ 0, & sonst \end{cases} = a \cdot [H(x-(x_0-b)) + H((x_0+b)-x) - 1]$$

**Kronecker-$\delta$**
(Greensche Funktion / Einflussfunktion)

$\delta_{kn} = \begin{cases} 1 & falls \quad k = n \\ 0 & sonst \end{cases}$

**Dirac-$\delta$-Funktion**
(Einheitsimpulsfunktion)

$\delta(x - x_0) := \lim_{d \to 0} f_{x_0,d}(x)$

**Harmonische Funktion**

$f$ harmonisch $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta f = 0}$

Vektorfeld: $\Delta\vec{v} = grad(div(\vec{v})) - rot(rot(\vec{v}))$

**Abrundungsfunktion**
(Gauss-Klammer)

$\lfloor y \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq y\}$

Rundet auf die nächste ganze Zahl, die ≤ y ist.

**Laplace Operator**

Kartesisch: $\Delta_k f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$

Polar: $\Delta_p f_{(r,\varphi)} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\varphi\varphi}$ (eben)

Zylinder: $\Delta_z f_{(\rho,\varphi,z)} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \cdot \frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

→ anderes Koordinatensystem: Kettenregel aus Koordinatentransformation

**Differentialoperatoren**

$\frac{\partial}{\partial x}$ bei Koordinatentransformation mit $x = f(r, \varphi)$:

$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial r} f + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} f}$

**Anfangs-/Endwertsatz**

$\lim_{s \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s) \quad / \quad \lim_{s \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0^+} s \cdot F(s)$

Wenn die Limite existieren!

## 2) Fourierreihen

**Periodische Funktion** $\boxed{f(x+p)=f(x)}$

$p$: Periodenlänge

$L$: Fundamentalperiode (kleinst mögliche Periode)

$\mathbb{N}$: Natürliche Zahlen $([0],1,2,3,...)$

$\mathbb{Z}$: Ganze Zahlen $(...,-2,-1,0,1,2,3,...)$

Beispiele:

Summe und Produkt von 2 p-periodischen Funktionen sind (mindestens) p-periodisch!

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\cos(x)$: | $p=2\pi$ | $\tan(x)$: | $p=\pi$ |
| $\sin(x)$: | $p=2\pi$ | $\sin(x)\cos(x)$: | $p=\pi$ |
| $e^{ix}$: | $p=2\pi$ | $\sin(2x)$: | $p=\pi$ |

(formale)
**Fourier Reihe**
für $f(x)$ mit $p=2\pi$

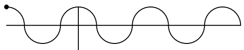
$$\boxed{f(x)\approx \tfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right)}$$

$$\boxed{a_n=\tfrac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(nx)dx}\qquad n\in\mathbb{N}$$

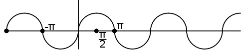
$$\boxed{b_n=\tfrac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin(nx)dx}$$

Für $a_k$ und $b_k$ ist Integration auch von d bis d+T möglich!

**Gerade Funktion** $f_1$ $\quad \boxed{f_1(-x)=f_1(x)}\quad \Rightarrow b_n=0\quad$ z.B. $\cos(x)$



**Ungerade Funktion** $f_2$ $\quad \boxed{f_2(-x)=-f_2(x)}\quad \Rightarrow a_n=0\quad$ z.B. $\sin(x)$



| f(h(x)) | g | u |
|---|---|---|
| g | g | g |
| u | g | u |

| · | g | u |
|---|---|---|
| g | g | u |
| u | u | g |

| + | g | u |
|---|---|---|
| g | g | ? |
| u | ? | u (SF) |

Die Ableitung einer geraden (ungeraden) Funktion ist ungerade (gerade)

$$g\xrightarrow{Abl.}u\xrightarrow{Abl.}g$$

Produkt 2 gerader Funktionen: gerade
Produkt 2 ungerader Funktionen: gerade
Produkt ungerade/gerade Funktion: ungerade
Summe 2 gerader Funktionen: gerade
Summe 2 ungerader Funktionen: ungerade

Bsp. gerade Funktion: $f(x)+f(-x)$

Bsp. ungerade Funktion: $f(x)-f(-x)$

Für beliebige Funktion f(x) gilt:

$$f(x)=\tfrac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)+\tfrac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right)\quad (?)$$

(formale)
**Fourier Reihe**
für $f(x)$ mit $p=T$
(T-periodische Funktionen)

$$\boxed{f(t)\approx \tfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(\tfrac{2\pi}{T}kt)+b_k\sin(\tfrac{2\pi}{T}kt)\right)}$$

$$\boxed{a_k=\tfrac{2}{T}\cdot\int_0^T f(t)\cdot\cos(\tfrac{2\pi}{T}kt)dt}$$

$$\boxed{b_k=\tfrac{2}{T}\cdot\int_0^T f(t)\cdot\sin(\tfrac{2\pi}{T}kt)dt}$$

Für $a_k$ und $b_k$ ist Integration auch von d bis d+T möglich!

**Transformation**
der Periodizität

$f(t)$ mit Periode $T$ $\quad\rightarrow\quad$ $\tilde{f}(x)=f(\tfrac{T}{2\pi}x)$ mit Periode $2\pi$

**Komplexe**
**Fourier Reihe**
(komplexe Fourier Reihe)

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{2\pi}{L}inx}}\qquad c_n\in\mathbb{C}_n\qquad c_n=\frac{1}{L}\int_0^L e^{-\frac{2\pi}{L}inx}\cdot f(x)dx\ =\frac{1}{L}\int_a^{L+a}(...)$$

Falls die Fourier-Reihe für alle $x$ konvergiert, definiert sie eine $L$-periodische Funktion $f(t)$.

$2\pi$-period.: $\boxed{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cdot e^{inx}}\qquad c_n=\tfrac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot e^{-inx}dx$

**Umkehrformel**
(komplex → reell)

$$a_n=c_n+c_{-n}\qquad b_n=i\cdot(c_n-c_{-n})$$

**Reihenansatz**
(für DGL hier bei 2π-period.)

$$\boxed{y(x)=\tfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos(nx)+b_n\cdot\sin(nx)\right)}$$

## 3) Partielle Differentialgleichungen

**Wärmeleitungs-gleichung (Bsp.)**
(Prototyp einer parabolischen partiellen Differentialgleichung)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) = div(k\nabla u) + \rho \cdot f(x,t,u)}$$

$\boxed{u_t = a^2 \Delta u}$ $\boxed{a^2 = \frac{k}{c\rho}}$

→ bei $f = 0$: $c, \rho, k$ : konst.

→ bei $f$ unabh. von $u$: Lineare PDGL mit variablen Koeff.

→ bei $k, c, \rho$ unabh. von $u$: Quasilineare PDGL

$\rho$: Dichte
$c$: Spezifische Wärmekapazität
$u$: Temperaturverteilung
$k$: Wärmeleitungskoeffizient
$a$: Temperaturleitfähigkeit

**Stationäre Temperatur-verteilung (Bsp.)**
(Prototyp elliptischer PDGL)

$\boxed{\Delta u(x) = G(x, u_x, u_y, u_z)}$ $\boxed{div(\nabla u) = k\nabla u + \nabla u}$

→ bei $G = 0$: $\Delta u = 0$ (Laplacegleichung)

→ bei $G = G(x)$: $\Delta u = g(x)$ (Poissongleichung)

$$\frac{\partial}{\partial t} u = u_t = 0$$

**Kontinuitätsgleichung (Bsp.)**
(Ptototyp hyperbolischer PDGL)

$\boxed{\rho_t + div(\rho \vec{v}) = 0}$

→ bei $x \in \mathbb{R}$: $v = v(x,t)$
(Geschwindigkeit in x-Richtung)

$\vec{v}(x,t)$: Strömungsfeld
$\rho(x,t)$: Dichte der Substanz (Gesucht)

Masse: $M(t) = \int_B \rho dV$

Fluss: $\int_{\partial B} \rho \vec{v} \vec{n} ds$

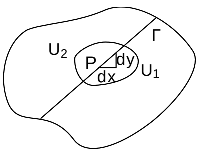
**Isothermische Strömung (Bsp.)**
(Quasilineare PDGL)

$\boxed{P = R \cdot T}$ $T = konst.$

Massenerhaltung: $\rho_t + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v) = 0$ $\rho \cdot v = m$

Impulserhaltung: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v^2 + a^2 \rho) = 0$

**Quasilineare PDGL**
(2. Ordnung)




$\boxed{au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f}$

$$\begin{pmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(u_x) \\ d(u_y) \\ f \end{pmatrix}$$

$A$ regulär $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$
$\det(A) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\infty$ Lösungen
$\frac{dy}{dx}$: Charakteristische Richtung

**Superposition**
(bei linearen PDE)

Wenn: $L[u_i] = f_i$: $L[\sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i] = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$

**Cauchy Problem** Anfangswertproblem (gegeben: PDGL und Anfangsbedingungen)

**Dirichlet-Bedingung** PDE für $u$: $u(x,y) = f(x,y)$ für $(x,y) \in \partial\Omega$
Bsp: $u(0,t) = a$, $u(L,t) = b$ Betrachtung des Zustands an Enden.

**Neumann-Bedingung** PDE für $u$: $\frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(x,y) = g(x,y)$ für $(x,y) \in \partial\Omega$
Bsp: $u_x(0,t) = c$, $u_x(L,t) = d$ Betrachtung Fluss durch die Enden.

## Klassifizierung

**Ordnung** Höchste partielle Ableitung (auch gemischte!)

**Homogenität** PDE inhomogen: Es kommt ein Term ohne $u$ / $u_x$ vor.

**Linearität** Linear: $L[v + w] = L[v] + L[w]$ / $L[\alpha \cdot v] = \alpha \cdot L[v]$

quasilinear Linear in allen höchsten partiellen Ableitungen, aber nicht linear insgesamt.

semilinear Nicht linear, aber nur in $u$ nichtlinear (keine Terme wie $u_x u_y$, $u_x^2$, etc.)

## 4) Gleichungen 1. Ordnung (Methode der Charakteristiken)

**PDE-Form**

$$\boxed{a(x,y,u)\cdot u_x + b(x,y,u)\cdot u_y = c(x,y,u)}$$

Keine $u_x u_y$-Terme!

**Parametrisierung**

$s$: Anfangsbedingung (wie weit entlang Anfangsbedingung)
$t$: Charakteristik (wie weit entlang Charakteristik)

Keine $u_x u_y$-Terme!

**Charakteristische Gleichungen**

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}_{(t,s)} = a(x_{(t,s)}, y_{(t,s)}, u_{(t,s)}) \\ \frac{\partial y}{\partial t}_{(t,s)} = b(x_{(t,s)}, y_{(t,s)}, u_{(t,s)}) \\ \frac{\partial u}{\partial t}_{(t,s)} = c(x_{(t,s)}, y_{(t,s)}, u_{(t,s)}) \end{cases}$$

Anfangsbedingungen:

$$x(0,s) = x_0(s)$$
$$y(0,s) = y_0(s)$$
$$u(0,s) = u_0(s)$$

**Rezept**

1. Charakteristische Gleichungen aufstellen und lösen $\Rightarrow x_{(t,s)},\ y_{(t,s)},\ u_{(t,s)}$
2. Versuche $t_{(x,y)},\ s_{(x,y)}$ t zu finden
3. Lösung: $u_{(x,y)} = u(t_{(x,y)}, s_{(x,y)})$

## 5) Gleichungen 2. Ordnung

**PDE-Form**

$$\boxed{a\cdot u_{xx} + b\cdot u_{xy} + c\cdot u_{yy} + d\cdot u_x + e\cdot u_y + f\cdot u = g}$$

$a,b,c,d,e,f,g_{(x,y)}$ → linear

**Klassifizierung**

$$b^2 - 4ac \begin{cases} < 0 \\ > 0 \\ = 0 \end{cases}$$

- $<0$: **elliptisch**
- $>0$: **hyperbolisch** → 2 reelle Lösungen / 2 charakteristische Richtungen
- $=0$: **parabolisch** (falls 2cd≠be) → 1 reelle Lösung / 1 charakteristische Richtung
  **degeneriert** (falls 2cd=be)

## Separation der Variablen

**Voraussetzung**

- Partielle Differentialgleichung mit AB / RB: linear und homogen.

**Vorgehen**

- Separationsansatz: Ansatz für eine Lösung der Gleichung (ohne AB / RB).
  Lösung: u = Produkt von vielen verschiedenen Funktionen.
  z.B. Ansatz für PDGL mit partiellen Ableitungen nach x und t:
  $\boxed{u(x,t) = F(x)\cdot G(t)}$ → Ansatz in Gleichung einfügen.
  Führt auf eine Gleichung der Form: $f_1(G_{(t)}, G'_{(t)}, G''_{(t)}, \ldots) = f_2(F_{(x)}, F'_{(x)}, F''_{(t)}, \ldots)$
  Clue: Die beiden Terme können nur gleich sein, wenn sie konst. sind: $f_1 = f_2 = k \in \mathbb{R}$

- RB / AB ausdrücken mit Separationsansatz
  $F(x)/G(t)$ sind nicht null, somit muss bei einer Gleichung wie $F(0)\cdot G(t) = 0$ automatisch $G(0) = 0$ sein.

- Fallunterscheidung: Für $k \in \mathbb{R}$ $(>0, <0, =0)$. Beginn mit der Funktion, über welche man durch AB / RB mehr Informationen hat.
  DGL ausrechnen für entsprechendes $k \in \mathbb{R}$ und AB/RB einbeziehen.
  Falls $F(x)$, resp. $G(t)$ bei einem der Fälle gleich Null ist, scheidet dieser Fall aus.

- Superposition: Liefert einen Ansatz für die Lösung des ganzen Problems (inkl. AB / RB)

## 6) Sin / Cos Umformungen

Rechtwinkliges Dreieck:

$$\sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$$

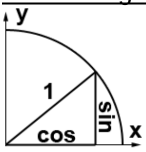
$$\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Cosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

Rechenregeln sin/cos/tan:




$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin^2(x) = \tfrac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) = \tfrac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$$

$$\sin(\alpha) = \tfrac{1}{2i}\left(e^{i\cdot\alpha} - e^{-i\cdot\alpha}\right)$$

$$\cos(\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(e^{i\cdot\alpha} + e^{-i\cdot\alpha}\right)$$

$$\sinh(\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right)$$

$$\cosh(\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right)$$

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$$

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha)} = 1 + \cot^2(\alpha)$$

| α | 0<br>0° | π/6<br>30° | π/4<br>45° | π/3<br>60° | π/2<br>90° | π<br>180° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 |
| tan | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | 0 |
| cot | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | - |

Parameterwirkung sin / cos $a \cdot \sin(bx + c) + d$ $a$ : Amplitude, $b$ : Periode= $\frac{2\pi}{b}$ , $c$ : Nullstelle, $d$ : y-Verschiebung

$$\sin(x)\sin(y) = \tfrac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \tfrac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \tfrac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

$$\cos(\gamma - a) = \cos(\gamma)\cos(\alpha) + \sin(\gamma)\sin(\alpha)$$

$$\sin(\gamma - a) = \sin(\gamma)\cos(\alpha) - \cos(\gamma)\sin(\alpha)$$

$$\sin^2(x) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right)$$

$$\sin^3(x) = \tfrac{1}{4}\left(3\sin(x) - \sin(3x)\right)$$

$$\sin^4(x) = \tfrac{1}{8}\left(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\right)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\cos^2(x) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right)$$

$$\cos^3(x) = \tfrac{1}{4}\left(3\cos(x) + \cos(3x)\right)$$

$$\cos^4(x) = \tfrac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right)$$

## 7) Integrationstafel für Fourier-Reihen

$$\boxed{a_k = \tfrac{1}{\pi}\int \cos(nx)\cdot f(x)dx}$$

$$\int \cos(nx)\cos(x)\,dx = \tfrac{1}{n^2-1}\left(n\cos(x)\sin(nx) - \cos(nx)\sin(x)\right)$$

$$\int \cos(nx)\sin(x)\,dx = \tfrac{1}{n^2-1}\left(n\sin(x)\sin(nx) + \cos(x)\cos(nx)\right)$$

$$\int \cos(nx)\cos(x)\sin(x)\,dx = \tfrac{\cos(nx-2x)}{4n-8} - \tfrac{\cos(nx+2x)}{4n+8}$$

$$\int \cos(nx)\cos^2(x)\,dx = \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{\sin(nx-2x)}{n-2} + \tfrac{2\sin(nx)}{n} + \tfrac{\sin(nx+2x)}{n+2}\right]$$

$$\int \cos(nx)\sin^2(x)\,dx = \tfrac{\sin(nx)}{2n} - \tfrac{\sin(nx-2x)}{4n-8} - \tfrac{\sin(nx+2x)}{4n+8}$$

$$\int \cos(nx)\cos^2(x)\sin(x)\,dx = \tfrac{1}{8}\left[\tfrac{\cos(nx-3x)}{n-3} + \tfrac{\cos(nx-x)}{n-1} - \tfrac{\cos(nx+x)}{n+1} - \tfrac{\cos(nx+3x)}{n+3}\right]$$

$$\int \cos(nx)\sin^2(x)\cos(x)\,dx = \tfrac{1}{8}\left[\tfrac{\sin(nx-x)}{n-1} + \tfrac{\sin(nx+x)}{n+1} - \tfrac{\sin(nx-3x)}{n-3} - \tfrac{\sin(nx+3x)}{n+3}\right]$$

$$\int \cos(nx)\cos^2(x)\sin^2(x)\,dx = \tfrac{1}{16}\left[\tfrac{2\sin(nx)}{n} - \tfrac{\sin(nx-4x)}{n-4} - \tfrac{\sin(nx+4x)}{n+4}\right]$$

$$\boxed{b_k = \tfrac{1}{\pi}\int \sin(nx)\cdot f(x)dx}$$

$$\int \sin(nx)\cos(x)\,dx = \tfrac{1}{1-n^2}\left(n\cos(x)\cos(nx) + \sin(nx)\sin(x)\right)$$

$$\int \sin(nx)\sin(x)\,dx = \tfrac{1}{n^2-1}\left(\cos(x)\sin(nx) - n\sin(x)\cos(nx)\right)$$

$$\int \sin(nx)\cos(x)\sin(x)\,dx = \tfrac{\sin(nx-2x)}{4n-8} - \tfrac{\sin(nx+2x)}{4n+8}$$

$$\int \sin(nx)\cos^2(x)\,dx = -\tfrac{\cos(nx-2x)}{4n-8} - \tfrac{\cos(nx)}{2n} - \tfrac{\cos(nx+2x)}{4n+8}$$

$$\int \sin(nx)\sin^2(x)\,dx = \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{\cos(nx-2x)}{n-2} - \tfrac{2\cos(nx)}{n} + \tfrac{\cos(nx+2x)}{n+2}\right]$$

$$\int \sin(nx)\cos^2(x)\sin(x)\,dx = \tfrac{1}{8}\left[\tfrac{\sin(nx-3x)}{n-3} + \tfrac{\sin(nx-x)}{n-1} - \tfrac{\sin(nx+x)}{n+1} - \tfrac{\sin(nx+3x)}{n+3}\right]$$

$$\int \sin(nx)\sin^2(x)\cos(x)\,dx = \tfrac{1}{8}\left[\tfrac{\cos(nx-3x)}{n-3} + \tfrac{\cos(nx+3x)}{n+3} - \tfrac{\cos(nx-x)}{n-1} - \tfrac{\cos(nx+x)}{n+1}\right]$$

$$\int \sin(nx)\cos^2(x)\sin^2(x)\,dx = \tfrac{1}{16}\left[\tfrac{\cos(nx-4x)}{n-4} - \tfrac{2\cos(nx)}{n} + \tfrac{\cos(nx+4x)}{n+4}\right]$$

**Div.**

$$\int \sin(ax)\sin(bx)dx = \tfrac{\sin(ax-bx)}{2a-2b} - \tfrac{\sin(ax+bx)}{2a+2b}$$

$$\int \cos(ax)\sin(bx)dx = \tfrac{\cos(ax-bx)}{2a-2b} - \tfrac{\cos(ax+bx)}{2a+2b}$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)dx = \tfrac{\sin(ax-bx)}{2a-2b} + \tfrac{\sin(ax+bx)}{2a+2b}$$

## 8) Laplacegleichung

$\boxed{\Delta u = \nabla^2 u = 0}$

z.B.: $\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$

Elliptische PDGL 2. Ordnung.
Lösungen heissen harmonisch, erfüllen **Mittelwertsatz** und **Minimum-/Maximumprinzip**.

**Mittelwertsatz**

Funktionswert einer harmonischen Funktion u = Mittelwert der Funktionswerte auf jedem mit der Stelle konzentrischen Kreis mit Radius r. Der Funktonswert von u ist im Zentrum ($x_0$,$y_0$)

$$u(x_0, y_0) = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\,dt$$

**Minimum-/ Maximumprinzip**

Das Maximum einer harmonischen Funktion auf D, vorausgesetzt ihr Rand ist stetig, liegt auf dem Rand B von D.
→ Funktionen nach φ ableiten und Null setzen um Extrema zu finden.

### Laplacegleichung in ebenen Polarkoordinaten

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{1}{r}u_r + \tfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$$

Mit folgender allgemeinen Lösung:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} \left( (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cdot e^{in\varphi} + C_0 + D_0 \cdot \log(r) \right)$$

Die Koeffizienten $A_n$,$B_n$,$C_0$,$D_0$ ergeben sich eindeutig aus den Randbedingungen u(r,φ)

**Dirichletproblem**
Kreisscheibe

$$\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0 & r < a \\ u(a,\varphi) = f(\varphi) \end{cases}$$

$a$: Radius Kreisscheibe

Negative Potenzen von r sowie log(r) tritt nicht auf (folgt aus Stetigkeit von u(r,φ) für r = 0). Somit: $B_n = D_0 = 0$. Lösung:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi} \cdot r^{|n|}$$

Koeffizient $A_n$ aus Randbedingung:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi} \cdot a^{|n|} = f(\varphi)$$

**Dirichletproblem**
Komplement der Kreisscheibe

$$\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0 & r > a \\ u(a,\varphi) = f(\varphi) \\ u(r,\varphi) = 0 & \text{beschränkt für } r \to \infty \end{cases}$$

$a$: Radius Kreisscheibe

Positive Potenzen von r sowie log(r) tritt nicht auf (folgt aus Beschränktheit von u(r,φ) für r → ∞). Somit: $A_n = D_0 = 0$. Lösung:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi} \cdot r^{-|n|}$$

Koeffizient $B_n$ aus Randbedingung:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi} \cdot a^{-|n|} = f(\varphi)$$

**Dirichletproblem**
Kreisring (Annulus)

$$\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0 & R_1 < r < R_2 \\ u(R_1,\varphi) = f_1(\varphi) \\ u(R_2,\varphi) = f_2(\varphi) \end{cases}$$

$R_1$: Radius

$R_2$: Radius

Alle Potenzen von r sowie log(r) sind zu beachten.
Koeffizienten bestimmbar aus Gl.-System:

$$\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} (A_n R_1^n + B_n R_1^{-n}) e^{i\cdot n\cdot\varphi} + C_0 + D_0 \log(R_1) = f_1(\varphi)$$

$$\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} (A_n R_2^n + B_n R_2^{-n}) e^{i\cdot n\cdot\varphi} + C_0 + D_0 \log(R_2) = f_2(\varphi)$$

Ansatz Dirichletproblem Kreisinterior:

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cdot \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right)$$

Ansatz Dirichletproblem Kreisexterior:

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{-n} \cdot \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right)$$

Ansatz Dirichletproblem Kreisring:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 \log(r)) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (a_n r^n + b_n r^{-n})\cos(n\theta) + (c_n r^n + d_n r^{-n})\sin(n\theta) \right]$$

## 9) Index